

# Lösungen

## Mathematik II

Geometrie für die Berufsmaturität  
3. Auflage

April 2015



# PLANIMETRIE

## 1 Winkel

### Lösungen zu Übungen 1

- |  |  |
|--|--|
| 1. a) $180 - \beta = \alpha + \gamma$                          | b) $\varphi = 180 - \beta$                   |
| 2. a) $\alpha = 137^\circ$                                     | b) $\alpha = 105^\circ; \beta = 120^\circ$   |
| c) $\alpha = 45^\circ$   | d) $\alpha = 22^\circ; \beta = 124^\circ$    |
| 3. $\alpha = 20^\circ$   |  |
| 4. $\varepsilon = 78^\circ$                                    |  |
| 5. a) $\alpha = 58^\circ; \beta = 32^\circ; \gamma = 64^\circ$ | b) $\alpha = 10^\circ; \gamma = 76^\circ$    |
| c) $\alpha = 26^\circ; \beta = 112^\circ$                      | d) $\alpha = 63^\circ$                       |
| 6. a) $\beta = 3\alpha; \beta = 114^\circ$                     | b) $\beta = 4\alpha; \beta = 152^\circ$      |
| 7. a) $\varepsilon = 180^\circ - 2\alpha$                      | b) $\varepsilon = \frac{\alpha + 2\beta}{2}$ |
| 8. a) $\varepsilon = 100^\circ$                                | b) $\varepsilon = 180^\circ - 2\gamma$       |
| c) $\varepsilon = 0^\circ; \text{parallel}$                    | d) kein Schnittpunkt, nicht parallel         |

### Lösungen zu Übungen 2

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 9. a) $\gamma = \alpha + \alpha'; \varphi = 2\alpha + 2\alpha'$ | b) Formel aus a) gilt allgemein |
| c) $\gamma + \delta = 180^\circ$                                |                                 |
| 10. a) $\alpha = 29^\circ$                                      | b) $\beta = 45^\circ$           |
| c) $\gamma = 54^\circ$  | d) $\delta = 21^\circ$          |
| 11. $\beta = 90^\circ - \alpha$                                 |                                 |
| 12. a) $\alpha = 12.857^\circ$                                  | b) $\beta = 36^\circ$           |

## 2 Dreiecke

### Lösungen zu Übungen 3

- |    |   |                             |
|----|---|-----------------------------|
| 1. | a) 1 Lösung                                   | b) unendlich viele Lösungen |
|    | c) 1 Lösung                                   | d) 1 Lösung                 |
|    | e) 2 Lösungen                                 | f) 1 Lösung                 |
| 2. | Konstruktionen                                |                             |
| 3. | Konstruktion                                  |                             |
| 4. | Konstruktion                                  |                             |
| 5. | a) $13.4 \text{ cm}^2$                        | b) $16.96 \text{ m}^2$      |
| 6. | a) $h_a = 56 \text{ cm}; h_b = 24 \text{ cm}$ | b) $c = 2.5 \text{ m}$      |

### Lösungen zu Übungen 4

- |     |                                      |   |
|-----|--------------------------------------|---|
| 7.  | a) $h_a = 2.078 \text{ m}$           | b) $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$                    |
| 8.  | $h = 2.4 \text{ m}$                  |   |
| 9.  | a) $x = 0.96 \text{ m}$              | b) $x = \frac{4-a^2}{4}$                          |
| 10. | $6.325 \text{ cm}$                   |   |
| 11. | $A = 1611.955 \text{ cm}^2$          |   |
| 12. | $4.123a$                             |   |
| 13. | $a = 1.932r$                         |   |
| 14. | $a = \sqrt{rs}$                      |   |
| 15. | $h = 4.42 \text{ m}$                 |   |
| 16. | $h = 3.46 \text{ cm}$                |   |
| 17. | $b = 3.2 \text{ cm}$                 |   |
| 18. | a) Halbkreis: Durchmesser teilen 1:5 | b) Halbkreis: Durchmesser teilen 1: $\frac{4}{3}$ |

### Lösungen zu Übungen 5

19.  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
20.  $b = a\sqrt{2}$

21. a)  $c = 10 \text{ cm}; b = 8.66 \text{ cm}$       b)  $c = 2a; b = a\sqrt{3}$
22. a)  $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$       b)  $A = \frac{r^2 3\sqrt{3}}{4}$
- c)  $A = 3\rho^2\sqrt{3}$
23. a)  $A = 0.375 \text{ m}^2$       b)  $A = 0.504 \text{ m}^2$
- c)  $A = 291.6 \text{ m}^2$       d)  $A = 484 \text{ cm}^2$
24.  $A = \frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{3})$
25. a)  $A = 2s^2(2 - \sqrt{2})$       b)  $U = 8s(2 - \sqrt{2})$
26.  $A = \frac{a^2}{4}(3 + 2\sqrt{3})$
27.  $A = \frac{c^2}{8}(2 - \sqrt{3})$
28.  $x = 24 \text{ cm}$
29.  $s = 4\sqrt{5} \text{ cm} \rightarrow 8.944 \text{ cm}$
30.  $x_1 = 0.7 \text{ cm}; x_2 = 10.3 \text{ cm}$
31.  $a = 5\sqrt{13} \text{ cm} \rightarrow 18.028 \text{ cm}$
32.  $A = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2 \rightarrow 43.301 \text{ cm}^2$
33. a)  $d = 8.284 \text{ cm}$       b)  $d = 6 \text{ cm}$
34. a)  $r = \frac{3a}{8}$       b)  $r = \frac{a}{6}$       c)  $r = \frac{a}{3}$
- d)  $r = \frac{7a}{6}$
35.  $x = 0.558a$
36. a)  $h = 14.3 \text{ cm}$       b)  $h = \frac{1}{2}(d - \sqrt{d^2 - b^2})$
37.  $s = a\sqrt{2}; k = a\sqrt{3}$
38.  $k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
39. a)  $h = 1.633 \text{ dm}$       b)  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
40.  $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
41.  $\overline{AB} = a\sqrt{5}; \overline{AC} = a\sqrt{3}; \overline{BC} = a\sqrt{2}$  (Pythagoras)

### 3 Viereck und Vieleck

#### Lösungen zu Übungen 6

1. a)  $A = a \cdot h_a$                       b)  $A = \frac{e \cdot f}{2}$   
c)  $A = m \cdot h$
2. a)  $A = 361 \text{ cm}^2$                       b)  $A = 348.48 \text{ m}^2$   
c)  $A = 420.25 \text{ cm}^2$
3. a)  $A = 14'030.658 \text{ m}^2$                   b)  $A = 127.5 \text{ cm}^2$   
c)  $A = 25.536 \text{ m}^2$
4.  $a = 2.8 \text{ dm}; b = 5.6 \text{ dm}$
5. a)  $A = 113.4 \text{ cm}^2$                       b)  $A = 2204 \text{ cm}^2$
6.  $b = 4.8 \text{ cm}$
7. a)  $A = 170 \text{ cm}^2$                       b)  $A = 2911.58 \text{ cm}^2$
8. a)  $A = 3547.24 \text{ mm}^2$                   b)  $A = 3360 \text{ cm}^2$
9. a)  $A = 253 \text{ cm}^2$                       b)  $A = 94.81 \text{ cm}^2$
10.  $x = 3 \text{ cm}$
11. a)  $48 \text{ cm}^2$                               b)  $A = \frac{3s^2}{4}$
12.  $A = \frac{(a-b)^2}{2}$
13.  $A = 117 \text{ cm}^2$
14.  $x = \frac{2}{3}b$
15. a)  $x = 26.1 \text{ cm}$                       b)  $x = 10.667 \text{ cm}$

#### Lösungen zu Übungen 7

16. Der Peripheriewinkel ist halb so gross wie der Zentriwinkel über der gleichen Sehne
17.  $\triangle MAP \cong \triangle MBP$ , rechtwinklig, Kathete  $r$  und Hypotenuse  $\overline{MP}$  gemeinsam
18. Skizze
19. a)  $A = 194'688 \text{ mm}^2$                       b)  $A = 912.04 \text{ cm}^2$
20.  $A = 1680 \text{ cm}^2$
21.  $\alpha = 100^\circ; \beta = 80^\circ$
22.  $l = 1.972r$
23.  $b = c = r = 9 \text{ cm}$
24. a) gleichschenkliges Trapez                  b) Rechteck
25.  $x = 11 \text{ cm}$

26. a) keines  
 b)  $n > 32$ -eck
27. a)  $\varphi = \frac{360}{n}$ ;  $\alpha = 180 - \varphi$   
 b)  $\varphi = \frac{360}{n}$ ;  $\alpha = 180 - \varphi$
28.  $n(180 - 2\beta) = 360$
29.  $r = 5 \text{ cm}$ ;  $\rho = 4.33 \text{ cm}$ ;  $A = 64.952 \text{ cm}^2$
30.  $\alpha = 77.143^\circ$ ;  $\beta = 25.714^\circ$
31. a)  $\alpha = 72^\circ$   
 b)  $\beta = 75^\circ$ ;  $\gamma = 135^\circ$

## 4 Kreis und Kreisteile

### Lösungen zu Übungen 8

1.  $A = \frac{U^2}{4\pi}$
2. a)  $A = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ ;  $U = a(2 + \pi)$   
 b)  $A = \frac{\pi}{4}ab$ ;  $U = \pi(a + b)$
- c)  $A = r^2 \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ;  $U = 2r(\pi + 3)$   
 d)  $A = \frac{a^2}{12}(3\sqrt{3} - \pi)$ ;  
 $U = \frac{a}{3}(9 + \pi\sqrt{3})$
3.  $A = 443.297 \text{ cm}^2$ ;  $U = 147.956 \text{ cm}$
4. a)  $A = s^2$ ;  $U = s \cdot \pi(2 + \sqrt{2})$   
 b)  $A = \frac{s^2}{24}(\pi + 6\sqrt{3})$ ;  
 $U = \frac{s \cdot \pi}{6}(4\sqrt{3} + 9)$
5.  $A = \frac{a^2}{8}(\pi - 2)$
6. a)  $A = \frac{a^2 \cdot \pi}{2}$ ;  $U = 2a \cdot \pi$   
 b)  $A_s : A_w = 1:1$
7.  $A_Q : A_D : A_K = 9\pi : 4\pi\sqrt{3} : 36$
8.  $A_{KR} = \frac{a^2 \pi}{4}$
9.  $A = \frac{\pi}{4}s^2$
10.  $x = r(\sqrt{5} - 1)$

11.  $A = 1.112r^2$

## Lösungen zu Übungen 9

12. a)  $A = 13.09 \text{ cm}^2$

c)  $r = 5.642 \text{ cm}$

13.  $\alpha = 229.183^\circ$

14.  $b = \frac{s \cdot \pi}{3}$

15. a)  $A = s^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right); U = s \cdot \pi$

c)  $A = a^2 \left( 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right); U = \frac{2s \cdot \pi}{3}$

16. a)  $A = r^2 (\sqrt{3} - 2\pi + 6); U = 2r(2\pi + 3)$

c)  $A = \frac{R^2}{2} \left( \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right); U = 4\pi \cdot R$

17. a)  $A = r^2$

18.  $A = r^2 \left( 2\sqrt{2} + 2 + \frac{5\pi}{4} \right)$

19.  $A = a^2 \left( \frac{\pi - 2\sqrt{2} + 1}{4} \right)$

20.  $b_1 : b_2 = 1 : 1$

21. a)  $A_1 = A_2 = \frac{s^2}{8} \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right)$

b)  $\alpha = 71.62^\circ$

b)  $A = s^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right); U = 2s \cdot \pi$

d)  $A = \frac{s^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right); U = \frac{3s \cdot \pi}{2}$

b)  $A = a^2 \left( \frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{2} - \pi + 1 \right);$

$$U = \frac{a \cdot \pi \sqrt{2}}{2}$$

d)  $A = \frac{s^2}{4} (\pi - \sqrt{3});$

$$U = s \left( 3 + \frac{\pi}{2} \right)$$

b)  $A = r^2 \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

b)  $U_1 = \frac{s}{2} \left( 4 + \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \right);$

$$U_2 = \frac{s}{2} (4 + \pi - \sqrt{2})$$







## Lösungen zu Übungen 12

43. Konstruktionen

44. Konstruktionen

45. Konstruktionen

46.  $\triangle ABC$  gleichschenkelig;  $\triangle APC$  gleichschenkelig;  $\triangle BAP$  gleichschenkelig

47.  $x = 20.944$  cm;  $x - 8 = 12.944$  cm;  $2x - 8 = 33.888$  cm

48.  $\overline{AB} : \overline{BE} = 1 : \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

49. a)  $\triangle ACD \approx \triangle DQC \approx \triangle QPD$ ; gleichschenkelig, Basiswinkel  $= \frac{180^\circ - 36^\circ}{2}$

b)  $\overline{AD} : \overline{DC} = \overline{DC} : \overline{DQ}$ ;  $\overline{AD} = 1.618$ ;  $\overline{DC} = 1$ ;  $\overline{DQ} = 0.618$



9. a)  $\frac{a}{c} = \frac{a}{c}$       b)  $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \rightarrow$   
 $a^2 + b^2 = c^2$

c)  $\frac{b}{c} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} \rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$       d)  $1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{\frac{b^2}{c^2}} \rightarrow$   
 $a^2 + b^2 = c^2$

10. a)  $\frac{5}{4}$       b)  $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$

c)  $\frac{1}{2}$       d)  $\frac{1}{2}$

### Lösungen zu Übungen 14

11. a)  $30^\circ \rightarrow \frac{\pi}{6}$       b)  $83.826^\circ \rightarrow 1.463$

c)  $21.274^\circ \rightarrow 0.371$

12. a)  $41.410^\circ \rightarrow 0.723$       b)  $\beta = \text{nicht definiert}$

c)  $109.259^\circ \rightarrow 1.907$

13. a)  $37.235^\circ \rightarrow 0.650$       b)  $33.5^\circ \rightarrow 0.585$

c)  $89.427^\circ \rightarrow 1.561$

14. a)  $\delta = 20^\circ$       b)  $\delta = 0.617^\circ$

c)  $\delta = 65.9^\circ$

d)  $\delta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$       e)  $\delta = 44.996^\circ$

f)  $\delta = 74.948^\circ$

15. a)  $\alpha = 61.288^\circ$ ;  $b = 5.861$  m;  $\beta = 28.712^\circ$       b)  $\alpha = 32.312^\circ$ ;  
 $\beta = 57.688^\circ$ ;  
 $c = 13.844$  dm

c)  $c = 181.22$  cm;  $a = 172.350$  cm;  $\alpha = 72^\circ$       d)  $\alpha = 43.813^\circ$ ;  
 $\beta = 46.187^\circ$ ;  
 $b = 84.427$  mm

e)  $a = 1.625$  m;  $b = 1.483$  m;  $\beta = 42.4^\circ$       f)  $\alpha = 59.003^\circ$ ;  
 $\beta = 30.997^\circ$ ;  
 $a = 171.438$  m

g)  $\alpha = 41.81^\circ$ ;  $\beta = 48.19^\circ$ ;  $b = 22.36$  cm      h) nicht definiert bzw.  
unendlich viele Lösungen

i)  $c = 119.357$  mm;  $a = 116.919$  mm;  $\beta = 11.6^\circ$       j)  $\alpha = 66.132^\circ$ ;



37.  $x = 1009.325 \text{ m}$   
 38. Distanz = 119.426 m; Höhe = 40.351 m  
 39. 352.060 m  
 40.  $y = 16.857 \text{ m}$   
 41.  $h = 2.356 \text{ m}$ ;  $b = 12.025 \text{ m}$   
 42.  $v = 1137.3 \text{ km/h}$ ;  $b = 5225.341 \text{ km}$

## 7 Berechnungen am schiefwinkligen Dreieck

### Lösungen zu Übungen 16

1. a)  $\sqrt{3}$                       b) 0.986                      c) 0.282  
     d) 0.75                        e) 0.971                      f) 0.947
2. a)  $20.487^\circ; 159.513^\circ$     b)  $139.970^\circ; 319.970^\circ$     c)  $25.842^\circ; 334.158^\circ$   
     d)  $180.573^\circ; 359.427^\circ$  e)  $87.614^\circ; 267.614^\circ$     f)  $126.870^\circ; 233.130^\circ$
3. a)  $\neq$                             b)  $\neq$                             c)  $=$   
     d)  $=$
4. a)  $f \rightarrow <$                     b)  $f \rightarrow =$                     c)  $f \rightarrow <$   
     d)  $f \rightarrow >$
5. a)  $f \rightarrow >$                     b) w                            c) w  
     d)  $f \rightarrow =$
6.  $\cos 90^\circ = 0$ ;  $0^\circ \leq \gamma < 90^\circ \rightarrow -2ab \cos \gamma$  negativ;  $90^\circ < \gamma \leq 180^\circ \rightarrow -2ab \cos \gamma$  positiv
7. a)  $\sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \cos \varphi$                       b)  $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$   
     c)  $1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$                       d)  $1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$
8.  $\alpha = 0^\circ$ :            0                      1                      0  
      $\alpha = 90^\circ$ :        1                      0                      undefiniert  
      $\alpha = 180^\circ$ :      0                      -1                     0  
      $\alpha = 270^\circ$ :    -1                     0                      undefiniert
9. a)  $r = \frac{s}{2} \cdot \tan \frac{360^\circ}{2 \cdot 6} \rightarrow U = 12 \cdot \tan(30^\circ)$                       b)  $U = 2n \cdot \tan\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$





17. a)  $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$ ;  $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a \cdot \sin \gamma}{c}\right)$ ;  $\beta = 180 - \alpha - \beta$   
 b)  $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta}$ ;  $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a \cdot \sin \beta}{b}\right)$ ;  $\gamma = 180 - \alpha - \beta$
18. a)  $b = 3.681$  m;  $\beta = 142^\circ$   
 b)  $\alpha = 84.920^\circ$ ;  $\beta = 95.080^\circ$   
 c)  $a = 45.861$  mm;  $\alpha = 104^\circ$
19. a)  $c = 1.764$  mm;  $d = 7.972$  mm;  $\gamma = 101^\circ$ ;  $\delta = 142^\circ$   
 b)  $\alpha = 77.364^\circ$ ;  $\beta = 51.318^\circ$ ;  $\gamma = 128.682^\circ$ ;  $\delta = 102.636^\circ$   
 c)  $b = 9.614$  m;  $d = 8.936$  m;  $\alpha = 82^\circ$ ;  $\beta = 67^\circ$
20.  $a = 16.851$  cm;  $b = 26.475$  cm;  $c = 26.630$  cm
21. a)  $U = 35.037$  dm;  $A = 74.160$  dm<sup>2</sup>  
 b)  $U = 28.39$  cm;  $A = 50.026$  cm<sup>2</sup>
22.  $\alpha = 38.942^\circ$ ;  $\beta = 31.586^\circ$ ;  $\gamma = 109.471^\circ$
23.  $55.759^\circ$  bzw.  $124.241^\circ$
24.  $h = 24.827$  m
25.  $V_w = 2943.231$  m<sup>3</sup>
26.  $t = 14.337$  min
27.  $h = 1204.485$  m
28.  $\overline{PQ} = 804.734$  m
29.  $\overline{S_1S_2} = 276.406$  m
30.  $33.898$  km
31.  $x = 1.083$
32.  $x = 5.758$  cm
33.  $x = \frac{b}{2}(1 - \tan^2 \alpha)$

## Lösungen zu Übungen 19

34.  $A = \frac{1}{2} pq \cdot \sin \alpha$

35. a)  $A = \frac{1}{2} pq = 20 \text{ cm}^2$

b) / c) für  $\alpha \neq 90^\circ$ : 2 Dreiecke mit gleicher Fläche

36. a)  $A = 8445.797 \text{ m}^2$

b)  $A = 1070.067 \text{ dm}^2$

37.  $\gamma_1 = 32.151^\circ$ ;  $\gamma_2 = 147.849^\circ$  (→ es gibt immer 2 Lösungen)

38.  $c = 1.705 \text{ dm}$ ;  $b = 3.254 \text{ dm}$

39. a)  $A = 13.252 \text{ cm}^2$

b)  $A = 36.180 \text{ cm}^2$

c)  $A = 37.971 \text{ cm}^2$

d)  $A = 14.506 \text{ cm}^2$

e) 
$$A = r^2 \left( \frac{\pi \cdot \arcsin\left(\frac{s}{2r}\right)}{180} - \frac{\sin\left(2 \cdot \arcsin\left(\frac{s}{2r}\right)\right)}{2} \right)$$

f) 
$$A = \frac{s^2}{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left( \frac{\pi \cdot \alpha}{180} - \sin \alpha \right)$$

40.  $A = 36.522 \text{ cm}^2$

41.  $A = 69.828 \text{ cm}^2$

42.  $A = 68.518 \text{ m}^2$

43.  $A = 12.616 \text{ cm}^2$

44.  $A = 349.613 \text{ mm}^2$

45.  $A = 146.153 \text{ cm}^2$

46.  $A = 14.799 \text{ mm}^2$

47.  $A = 1219.663 \text{ mm}^2$

48.  $s = 32.492 \text{ cm}$ ;  $r_u = 52.573 \text{ cm}$ ;  $A_{10} = 8122.992 \text{ cm}^2$

49. a) 
$$A_n = \frac{a^2 \cdot n}{4 \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)}$$

b) 
$$A_n = r_2 \cdot n \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)$$

c) 
$$A_n = \frac{\rho^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)}{2}$$

## 8 Trigonometrische Funktionen und ihre Graphen

### Lösungen zu Übungen 20

1.

	Definitionsmenge	Wertemenge	Periodenlänge	Symmetrieachsen	Symmetriezentren
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-1 \leq y \leq 1$	$2\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$	$x = n \cdot \pi, y = 0$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-1 \leq y \leq 1$	$2\pi$	$x = n \cdot \pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, y = 0$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{x}{2} + n \cdot \pi \right\}$	$\mathbb{R}$	$\pi$	keine	$x = n \cdot \pi, y = 0$

2.

	Nullstellen	Relative Minima	Relative Maxima
$\sin x$	$n \cdot \pi$	$-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$	$\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$
$\cos x$	$\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$	$\pi + n \cdot 2\pi$	$n \cdot 2\pi$
$\tan x$	$n \cdot \pi$	$x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, y$ nicht definiert	$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, y$ nicht definiert

3. a)  $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$       b)  $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c)  $\tan 225^\circ = \tan 45^\circ = 1$

d)  $\sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$       e)  $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f)  $\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

4. a)  $x = \frac{\pi}{4}$       b)  $x = \frac{4\pi}{3}$

c)  $x = \frac{2\pi}{3}$

5. a)  $-\cos x$                                     b)  $\sin x$   
 c)  $-\sin x$   
 d)  $-\cos x$
6. a)  $2 \cdot \cos x$                                 b)  $0$   
 c)  $-1$   
 d)  $-1$     e)  $0$   
 f)  $2 \cdot \cos x$

## Lösungen zu Übungen 21

7. a) Graph    b) Jeder y-Wert wird verdreifacht  
 c) Jeder y-Wert wird halbiert                d) Spiegelung an der x-Achse
8. a) Graph, Periode  $2\pi$                         b) Graph, Periode  $\frac{2\pi}{3}$   
 c) Graph, Periode  $4\pi$                          d) Graph,  
 $y = \cos(-x) = \cos x$
9. a) Graph    b) Verschiebung um  $\frac{\pi}{3}$  nach rechts (positiv)  
 c) Verschiebung um  $\frac{3\pi}{4}$  nach links (negativ)
10. a) Graph  
 b) Verschiebung um +1 in y-Achsenrichtung nach oben  
 c) Verschiebung um -2 in y-Achsenrichtung nach unten
11. a)–h) Graph
12. a)  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$                 b)  $y = \frac{1}{2} \cdot \sin(4x) - 2.5$   
 c)  $y = 3 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$                 d)  $y = \sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 2$
13. a)  $y = -3 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$                 b)  $y = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) + 2$   
 c)  $y = \frac{3}{2} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}$                     d)  $y = \cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\right) - 2$
14. a)  $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$                 b)  $y = \frac{1}{2} \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right) - 5$

15.  $y = 2 \sin\left(\frac{1}{3}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1 \rightarrow$  strecken mit Faktor 2 in y-Richtung; strecken mit Faktor 3 in x-Richtung;  
schieben um  $\frac{\pi}{2}$  nach links; schieben um 1 Einheit nach oben;  $H(\pi/3)$ ,  $T(4\pi/-1)$
16.  $y = \cos\left(\frac{5}{2}\left(x - \frac{\pi}{10}\right)\right) - \frac{1}{2} \rightarrow$  strecken mit Faktor  $\frac{2}{5}$  in x-Richtung;  
schieben um  $\frac{\pi}{10}$  nach rechts; schieben um  $\frac{1}{2}$  nach unten;  $H(0.314/0.5)$ ,  
 $T(1.574/-1.5)$

## Lösungen zu Übungen 22

17. a)  $p = 2, a = 1, Q(0; -1), x_0 = \frac{1}{2}$                       b) Graph
18. a)  $p = 6, a = 3, Q(0; 0), x_0 = -3$                       b) Graph
19. a)  $p = 8, a = \frac{1}{2}, Q(0; 0), x_0 = 12$                       b) Graph
20. a)  $N\left(n \cdot \pi - \frac{c}{b} / 0\right)$ ; Abstand:  $\frac{\pi}{b}$
- b) Amplitude: wird verdoppelt; Lage neu:  $N\left(n \cdot \pi - \frac{c}{2b} / 0\right)$ ; Abstand: wird halbiert
- c) Amplitude: wird halbiert; Lage neu:  $N\left(n \cdot \pi - \frac{c}{2b} / 0\right)$ ; Abstand: bleibt gleich
- d) Amplitude: bleibt gleich; Lage: bleibt gleich; Abstand: wird verdoppelt
- e)  $|a| > 1 \rightarrow$  Streckung vertikal;  $0 < |a| < 1 \rightarrow$  Stauchung vertikal  
 $b > 1 \rightarrow$  Stauchung horizontal;  $0 < b < 1 \rightarrow$  Streckung horizontal
21. a)  $A = 200.0 \text{ V}; T = \frac{1}{25} \text{ s}; t_0 = 0.04 \text{ s}; f = 25 \text{ Hz}; \varphi = -0.683$
- b)  $U = -126.225 \text{ V}$
- c)  $U = 126.225 \text{ V}$                       d)  $x_1 = 0.00697 \text{ s}$
- e)  $x_0 = 0.0143 \text{ s}$
22.  $I = 30 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t)$
23.  $P(t) = 30 \cdot \sin\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$

## 9 Polarkoordinaten

### Lösungen zu Übungen 23

1. Graph
2.  $A = (4; 60^\circ)$ ,  $B = (6; 150^\circ)$ ,  $C = (3; 0)$ ,  $D = (2; 225^\circ)$
3. a)  $P = (10; 53.13^\circ)$   
c)  $P = (5; 233.1^\circ)$
4. a)  $P = (9.329; 5.829)$   
c)  $P = (0; -7)$
5.  $B = G; D = F; E = K = H$
6. a)  $d = 7.087$   
b)  $P = (7.280; 15.95^\circ)$   
d)  $P = (5.385; 338.2^\circ)$   
b)  $P = (-5; 5)$   
d)  $P = (1.248; -2.728)$   
b)  $d = 9.242$

### Lösungen zu Übungen 24

7. a)  $r(\varphi) = \frac{4}{3\cos\varphi - \sin\varphi}$   
b)  $r(\varphi) = \frac{3}{2\cos\varphi + \sin\varphi}$
8. a)  $f(x) = x + 2$   
b)  $f(x) = 3x - 5$
9. a)  $r(\varphi) = \frac{6}{4\sin\varphi + \cos\varphi}$   
b)  $r(\varphi) = \frac{6}{2\sin\varphi - \cos\varphi}$
10.  $g_1: r(\varphi) = -\frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}; g_1(x) = -x - 1$   
 $g_2: r(\varphi) = \frac{4}{2\sin\varphi - \cos\varphi}; g_2(x) = \frac{1}{2}x + 2$   
 $g_3: r(\varphi) = \frac{4}{\sin\varphi + 2\cos\varphi}; g_3(x) = -2x + 4$
11. a) Graph  
b) Kreis  
c) Die Grösse ändert sich;  $k = r_{\text{Kreis}}$   
d) Graph für  $k = a$  ist deckungsgleich mit dem Graphen für  $k = -a$
12. a) Graph  
b) Gerade  
c)  $\varphi = \frac{\pi}{6}$   
d) Steigung der Geraden
13. a) Graph  
b) Spiegelung an der y-Achse  
c) Grösse der Kurve ändert sich;  $P = (2a; 0^\circ); Q = (a; 90^\circ)$
14. gleiche Form, aber die Kurve ist um  $90^\circ$  gedreht

15. a) Kardioide  
 b) Graph; die Kurve ist jetzt «ingerollt»  
 c) Graph; die Kurve hat nur eine Delle und keinen Einschnitt  
 d) Graph; die Kurve hat keine Delle und ist nicht vollständig kreisförmig
16. a) Graph  
 b) für ungerade  $n$ :  $n$  Blütenblätter; für gerade  $n$ :  $2n$  Blütenblätter  
 c)  $n = 3$   
 d) Graph; die Länge der Blütenblätter ändert sich,  $a$  ist die Länge der Blütenblätter  
 e) Spiegelung an der  $y$ -Achse gegenüber betragsgleichem  $n$  (für gerade  $n$ : deckungsgleich)

## Lösungen zu Übungen 25

17. a) Graph; Windungsabstand entspricht  $a \cdot 2\pi$   
 b) Windungsabstand immer gleich (bei der logarithmischen Spirale wird er immer grösser)
18. a) Graph; Windungsabstand wird mit grösser werdendem  $a$  schneller grösser  
 b) Windungsabstand ist nicht immer gleich  
 c) Abstand der Windungen vergrössert sich noch schneller
19. a)  $r(0) = 1$   
 b) Graph; je grösser  $b$  ist, umso enger ist der Windungsabstand  
 c)  $r(\varphi) = e^{\frac{\varphi}{b} \ln 2} = e^{\frac{\ln 2}{b} \varphi}$
20. a) Graph; Umkehrfunktion der logarithmischen Spirale, deshalb ändert sich der Windungsabstand auch, aber von breit zu immer schmaler (also umgekehrt wie bei der logarithmischen Spirale)  
 b) je kleiner der Betrag von  $a$  ist, umso enger ist die Spirale gewunden; negative  $a$  verursachen eine Punktspiegelung der Spirale am Ursprung des Koordinatensystems  
 c) für  $\varphi$  zwischen 0 und 1 windet sich in der Gegenrichtung eine logarithmische Spirale ins Zentrum
21. a) Graph  
 b) asymptotisches Verhalten (Asymptote bei  $y = a$ ), Zentrum wird nie erreicht, Windungsabstand ändert sich noch schneller als bei anderen Spiraltypen
22. a) nein: ist nicht mit einer Gleichung beschreibbar, jeder Viertelkreis müsste separat beschrieben werden  
 b) entspricht am ehesten einer logarithmischen Spirale; passt im Zentrum eher schlecht, an den Übergängen zwischen den Quadraten am besten  
 c)  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  (Fibonacci-Zahlenreihe)

d) Annäherung an  $\phi$ ; umso näher, je höher das Verhältnis in der Fibonacci-Reihe steht

23. Streckfaktor zwischen den äussersten beiden Nullstellen:

$$\approx 1.8 \rightarrow k = \frac{\ln 1.8}{\pi} \rightarrow r(\varphi) = e^{\frac{\ln 1.8}{\pi} \varphi}$$

## 10 Goniometrie

### Lösungen zu Übungen 26

1. a)  $\cos \alpha$

b)  $\sin \alpha$

c) 1

d)  $\frac{1}{\sin \alpha}$

e)  $2 \cdot \sin^2 \alpha$

f) 1

2. a)  $\cos \alpha = 0.842$ ;  $\tan \alpha = 0.642$

b)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5} = 0.917$ ;

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2} = 2.291$$

c)  $\sin \alpha = 0.933$ ;  $\cos \alpha = 0.359$

### Lösungen zu Übungen 27

3.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{SD}}$

4. a)  $\cos(240^\circ + 90^\circ) = -\sin(240^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

b)  $\sin(150^\circ - 60^\circ) = \sin(90^\circ) = 1$

5. a)  $\frac{84}{85}$ ;  $-\frac{36}{85}$ ;  $\frac{13}{85}$ ;  $\frac{77}{85}$ ;  $\frac{84}{13}$ ;  $-\frac{36}{77}$

b)  $\frac{204}{325}$ ;  $\frac{36}{325}$ ;  $-\frac{253}{325}$ ;  $\frac{323}{325}$ ;  $-\frac{204}{253}$ ;  $\frac{36}{323}$

6. a)  $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta$

b)  $-2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$

c)  $1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta$

d)  $\tan \alpha + \tan \beta$



## Lösungen zu Übungen 28

7. a)  $\frac{1}{\tan^2 \alpha} - 1$       b)  $1 - \tan^2 \alpha$   
 c)  $-1$       d)  $2$
8. a)  $\cos \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$       b)  $\frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$   
 c)  $4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 8 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha$       d)  $1 - 8 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$
9. a) z. B.  $\alpha = 30^\circ: 1 \neq \frac{3}{2}$       b) z. B.  $\alpha = 30^\circ: 0 \neq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
10. a)  $-0.936$       b)  $0.572$   
 c)  $-0.882$       d)  $-1.624$
11. a)  $\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$   
 b)  $\cos^2 \alpha \cdot \cos \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta$
12. a)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$       b)  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$   
 c)  $\sqrt{3} + 2$       d)  $\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$   
 e)  $-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$       f)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
13. a)  $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha$       b)  $\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)$   
 c)  $\frac{\tan \alpha - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \cdot \tan \alpha}$   
 d)  $\frac{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}}{4} \cdot \cos \alpha - \frac{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}}{4} \cdot \sin \alpha$
14. a)  $0$       b)  $-1$
15. a)  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$       b)  $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$   
 c)  $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

## Lösungen zu Übungen 29

16. a)  $L = \{45^\circ; 225^\circ\}$  b)  $L = \{74^\circ; 254^\circ\}$   
c)  $L = \{68.2^\circ; 248.2^\circ\}$  d)  $L = \{50^\circ; 170^\circ\}$   
e)  $L = \{167^\circ; 347^\circ\}$  f) undefiniert
17. a)  $L = \{45^\circ; 225^\circ\}$  b)  $L = \{135^\circ; 315^\circ\}$   
c)  $L = \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ; 270^\circ; 360^\circ\}$  d)  $L = \{0^\circ; 180^\circ; 360^\circ\}$
18. a)  $L = \{32.405^\circ; 147.595^\circ\}$  b)  $L = \{69.174^\circ; 249.174^\circ\}$   
c)  $L = \{18.789^\circ; 327.211^\circ\}$   
d)  $L = \{85.5^\circ; 94.5^\circ; 274.5^\circ; 265.5^\circ\}$
19. a)  $L = \{57.995^\circ; 237.995^\circ\}$  b)  $L = \{66.422^\circ; 293.578^\circ\}$   
c)  $L = \{54.404^\circ; 125.596^\circ\}$  d)  $L = \{26.565^\circ; 206.565^\circ\}$
20. a)  $L = \{126.870^\circ; 233.130^\circ\}$   
b)  $L = \{53.130^\circ; 126.870^\circ; 233.130^\circ; 306.870^\circ\}$   
c)  $L = \{0^\circ; 45^\circ; 180^\circ; 225^\circ; 360^\circ\}$  d)  $L = \{30^\circ; 150^\circ\}$
21. a)  $L = \{35.264^\circ; 144.736^\circ; 215.264^\circ; 324.736^\circ\}$   
b)  $L = \{53.234^\circ; 126.766^\circ; 233.234^\circ; 306.677^\circ\}$   
c)  $L = \{45^\circ; 135^\circ; 225^\circ; 315^\circ\}$  d)  $L = \{90^\circ\}$
22. a)  $L = \{0^\circ; 60^\circ; 180^\circ; 300^\circ; 360^\circ\}$  b)  $L = \{111.471^\circ; 248.529^\circ\}$   
c)  $L = \{0^\circ; 75.964^\circ; 180^\circ; 255.964^\circ; 360^\circ\}$  d)  $L = \{106.307^\circ; 253.693^\circ\}$
23. a)  $L = \{60^\circ; 120^\circ; 240^\circ; 300^\circ\}$  b)  $L = \{90; 270\}$
24. a)  $L_x = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}; L_y = \{-1\}$   
b)  $L_x = \left\{ \frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}; \frac{23\pi}{12} \right\}; L_y = \{0.5\}$   
c)  $L_x = \{ \}; L_y = \{2.866\}$   
d)  $L_x = \{2.191; 5.333\}; L_y = \{-3.5\}$
25. a)  $L_{x/y} = \{0/0; \pi/0; 2\pi/0\}$   
b)  $L_{x/y} = \{0.896/1.250; 2.246/-1.250\}$

# STEREOMETRIE

## 11 Grundlagen

### Lösungen zu Übungen 30

- Skizze
  - z. B.  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ;  $\overline{AG} \cap \overline{BH}$ ;  $\overline{AB} = \overline{BA}$ ;  $ABC \parallel EFG$ ;  $ABC = BCD$ ;  
 $ABD \cap CGF$
- schneiden sich
  - sind windschief
  - $48.190^\circ$
  - $50.768^\circ$
- $45^\circ$
  - $20.705^\circ$
  - $34.54^\circ$

## 12 Prisma und Zylinder

### Lösungen zu Übungen 31

- $V = 900$ ;  $S = 770$
  - $V = 10b^3$ ;  $S = 42b^2$
  - $V = 11c^3$ ;  $S = 38c^2$
  - $V = 1026$ ;  $S = 914$
- 13 cm
- nein
  - $5682 \text{ cm}^2$
  - 2.807 kg
- $a^2 \sqrt{2}$
- $V = \frac{k^3 \sqrt{3}}{9}$
  - $S = 2k^2$
  - $l = 4\sqrt{3} \cdot k$
- $n^3$
  - $\frac{1}{n^3}$
  - $\cdot n$
  - $27; \frac{1}{27}; \cdot 3$
- $a = 0.424 \text{ m}$ ;  $b = 0.707 \text{ m}$ ;  $c = 1.131 \text{ m}$
- $l = 6.257 \text{ cm}$ ;  $b = 8.849 \text{ cm}$ ;  $h = 10.837 \text{ cm}$
- Skizze
  - $A = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4}$
- 40 %
- 25.883 %
- 329.102 %
- 61.059 kg



38.  $2237.646 \text{ cm}^2$   
39.  $4.33 \text{ cm}$   
40.  $d_a = 5.382 \text{ m}; d_i = 2.642 \text{ m}$   
41. a)  $V = 3621.903; S = 1972.699$  b)  $V = r^3 \left( 2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$   
 $S = r^2 \left( 6 + 6\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$   
c)  $V = 27c^3 (100\pi - 49\sqrt{3}); S = 90c^2 (22\pi - 7\sqrt{3})$  d)  $V = d^3 \left( 1 + \frac{3\pi}{2} \right);$   
 $S = 6d^2 (1 + \pi)$

## 13 Spitze Körper

### Lösungen zu Übungen 34

1. a)  $19.900 \text{ cm}$  b)  $455.368 \text{ cm}^2$   
c)  $599.368 \text{ cm}^2$  d)  $864 \text{ cm}^3$
2. a)  $V = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6}; S = a^2 (1 + \sqrt{3})$   
23b)  $V = 15084.945 \text{ cm}^3; S = 4371.281 \text{ cm}^2$   
c)  $V = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = 7542.472 \text{ cm}^3; S = a^2 \sqrt{3} = 2771.281 \text{ cm}^2$
3. a)  $15.995 \text{ cm}$  b)  $16.818 \text{ cm}$   
c)  $218.759 \text{ cm}^2$  d)  $253.833 \text{ cm}^2$
4. a)  $3.488 \text{ dm}$  b)  $1.699 \text{ dm}$
5. a)  $36.45 \text{ cm}^3$  b)  $30.964^\circ$   
c)  $50.194^\circ$
6. a)  $10.825 \text{ cm}$  b)  $671.813 \text{ cm}^2$
7.  $s = 13.014 \text{ cm}; h = 10.626 \text{ cm}$
8.  $126.996 \text{ cm}^3$  bzw.  $141.478 \text{ cm}^3$
9. a)  $V = \frac{a^3}{6}$  b)  $S = a^2 (1 + \sqrt{2})$   
c)  $k_{\text{tot}} = a(4 + 2\sqrt{3})$
10. a) 2 Kanten à  $5 \text{ cm}$ , 4 Kanten à  $6.5 \text{ cm}$  b)  $22.726 \text{ cm}^3$   
c)  $V = 0$  (flach)
11.  $S = a^2 (1 + \sqrt{2})$
12.  $V = \frac{a^3}{2}$
13. a) Skizze b)  $32.861 \text{ cm}$

- c) 7.970 cm
- 14. 310'332.668 cm<sup>3</sup>
- 15. 14.409 m<sup>2</sup>
- 16.  $V = a^3 \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right); S = a^2 (7 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2})$
- 17. a)  $V = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}; S = 2a^2 \sqrt{3}$                       b) 62.427 cm<sup>3</sup>
- 18.  $V = a^3 \cdot \sqrt{2}; S = 6a^2 \sqrt{3}$

### Lösungen zu Übungen 35

- 19. 27.713 cm
- 20.  $r = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}$
- 21. a) 26.362 m<sup>2</sup>                      b) 3.403 m  
       c) 8.847 m<sup>3</sup>
- 22.  $S = 129.308 \text{ cm}^2; V = 68.423 \text{ cm}^3$
- 23. a) 26.25 mm                      b) 4.274 mm
- 24. 1.801 cm
- 25.  $h = 3.048 \text{ cm}; d = 2.778 \text{ cm}$
- 26.  $m = 41.541 \text{ cm}; \varphi = 57.928^\circ; b = 42 \text{ cm}$
- 27. a)  $h = 24 \text{ cm}; d = 22 \text{ cm}; m = 26.401 \text{ cm}$                       b) 129.361 kg
- 28. 405 cm<sup>3</sup>

## 14 Stumpfe Körper

### Lösungen zu Übungen 36

- 1. a)  $V = 928.649; S = 604.903$   
       b)  $V = b^3 \cdot \frac{3 + \sqrt{2}}{12} = 0.368b^3; S = 4.923b^2$
- 2.  $V = 8721 \text{ cm}^3; S = 2711.4 \text{ cm}^2$
- 3. a) 381.917 cm<sup>3</sup>                      b) 224.820 cm<sup>2</sup>  
       c) 357.332 cm<sup>2</sup>                      d) 15 cm
- 4. 214.140
- 5. 2.8 cm x 2.8 cm

6. a)  $x = 3.713 \text{ cm}; A = 90.714 \text{ cm}^2$   
 b)  $x = 6.661 \text{ cm}; A = 57.146 \text{ cm}^2$
7.  $202,667 a^3$
8.  $16.452 \text{ m}$
9.  $V = \frac{73}{81} a^3 = 0.901a^3; S = a^2 \cdot \frac{32+10\sqrt{2}}{9} = 5.127a^2$
10. a)  $5 \text{ cm}$  b)  $6.934 \text{ cm}$   
 c)  $6.667 \text{ cm}$
11.  $0.824 \text{ g/cm}^3$
12. a)  $4 \text{ cm}$  b)  $94.049 \text{ cm}^2$

### Lösungen zu Übungen 37

13. a)  $428'947.82 \text{ cm}^3$  b)  $33'421.119 \text{ cm}^2$   
 c)  $126.839^\circ$
14.  $1883.86 \text{ cm}^3$
15.  $2261.209 \text{ cm}^2$
16.  $V = 0.329 a^3; S = 6.193 \text{ cm}^2$
17. a)  $0.874 \text{ g/cm}^3$  b)  $0.125 \text{ g/cm}^3$
18. a)  $17.100 \text{ cm}$  b)  $2.593 \text{ cm}$
19.  $h = 9.977 \text{ cm}; V = 270 \text{ ml}$
20.  $108^\circ$
21.  $396.678 \text{ g bzw. } 297.508 \text{ g}$

## 15 Kugel und Kugelteile

### Lösungen zu Übungen 38

1.  $1000$
2. a)  $5.099 \cdot 10^8 \text{ km}^2$  b)  $6.020 \cdot 10^{21} \text{ t}$
3.  $84386 \text{ Stück}$
4.  $V_1 = 78.440 \text{ cm}^3; V_2 = 420.389 \text{ cm}^3$
5.  $6.329 \text{ cm}$
6.  $h = \frac{2}{3} d$
7.  $r = 14.172 \text{ cm}; m = 72.264 \text{ cm}$
8.  $d_z = 0.816d; M = 2.565d^2$

9. 72.360 %

10. a) 21765.592 cm<sup>3</sup>

b) 1:0.637



11. a)  $S = a^2 \cdot \pi$  b) 1:1.910  
 c)  $904.779 \text{ cm}^3$
12. a)  $904.778 \text{ cm}^3$  b)  $492.499 \text{ cm}^3$   
 c)  $8488.581 \text{ cm}^3$
13.  $V_z = \frac{r^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}}{2}$
14.  $a = 12 \text{ cm}; V = 576 \text{ cm}^3$
15.  $a = 2 \cdot r \cdot \sqrt{6}$
16.  $0.887 \text{ cm}$
17. a)  $904.779 \text{ m}^3$  b)  $81.430 \text{ kg}$
18. a)  $113.097 \text{ cm}^3$  b)  $0.638 \text{ g/cm}^3$
19.  $3.848 a^3$
20.  $11.906 \text{ dm}^2$
21. a) 1:1.698 b) 1:1.910

### Lösungen zu Übungen 39

22. a) 4785.830 b) 2726.490  
 c)  $\frac{13d^3\pi}{750} = 0.0545d^3$  d)  $\frac{14\rho^3\pi}{81} = 0.543\rho^3$
23.  $G = 28.492 \text{ cm}^2; M = 33.016 \text{ cm}^3$
24. a)  $2675.578 \text{ cm}^2$   
 b)  $S = \pi\left(d(h_1 + h_2) + \frac{d^2}{2} - h_1^2 - h_2^2\right)$
25.  $3009.557 \text{ cm}^2$
26.  $110.238 \text{ g}$
27.  $851.530 \text{ dm}^2$
28.  $0.5 \text{ m}$
29. Tropen: 39.875 %; gemässigte Zonen: 51.831 %; Polarzonen: 8.294 %
30.  $254.939 \text{ g}$
31. a)  $\frac{a+r}{2a}$  b)  $\frac{2}{3}$
32. a)  $V = \frac{\sqrt{(d^2 - b^2)^3} \cdot \pi}{6}$  b)  $3.636 \text{ cm}^3$

# VEKTORGEOMETRIE

## 16 Vektorbegriff und Vektoroperationen

### Lösungen zu Übungen 40

- a)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ ;  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$ ;  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{FD}$ ;  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$

b)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FD}$ ;  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$ ;  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$ ;  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$
- a)  $c = 15.297$ ;  $\varphi = 78.690^\circ$     b)  $c = 11.250$ ;  $\varphi = 23,122^\circ$

c)  $c = 2.702$ ;  $\varphi = 21.870^\circ$
- 14.500

### Lösungen zu Übungen 41

- Skizze
- a)  $\vec{a} = 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$                       b)  $\vec{a} = \frac{16}{3}(\vec{b} - 2\vec{c})$

c)  $\vec{a} = -\frac{1}{8}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c}$
- a) wahr                                      b) falsch                                      c) wahr

d) wahr                                      e) falsch
- $\vec{r}_a = 2\vec{a} - 2\vec{b}$ ,  $\vec{r}_b = -\frac{5}{4}\vec{a} + 3\vec{b}$ ,  $\vec{r}_c = -\frac{3}{4}\vec{a} - 2\vec{b}$ ; Skizze
- $\overrightarrow{CE} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ ;  $\overrightarrow{AS} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ;  $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$ ;  $\overrightarrow{HS} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$ ;  
 $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ;  $\overrightarrow{MS} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$
- a)  $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{10}\vec{b} - \frac{9}{10}\vec{c}$                       b)  $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AE}$

c)  $\overrightarrow{BF} = \frac{9}{10}\overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{AE} = \vec{c} + \vec{h}$ ;  $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{h}$ ;  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{h}$ ;  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c} - \vec{h}$
- $\overrightarrow{HQ} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{PF} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$
- a) abhängig                                      b) unabhängig

c) unabhängig

d) abhängig                                      e) unabhängig

f) abhängig (mehr als 3 Vektoren)
- a) unabhängig                                      b) abhängig

c) unabhängig

d) abhängig                                      e) unabhängig

f)  $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{CD} \rightarrow$  abhängig
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$  und  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$

- $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}; \vec{m} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
- $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$
- $\vec{BS} = 2 \cdot \vec{SM}_b$
- $\vec{b} = (5; 53.13^\circ), \vec{c} = (\sqrt{37}; 260.5^\circ), \vec{d} = (2\sqrt{2}; 135^\circ)$

## 17 Komponentendarstellung von Vektoren

### Lösungen zu Übungen 42

- $A(2;2); B(-1;1); C(-2;-3)$
- Skizze
- $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix},$   
 $\vec{h} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Skizze
- $A'(1;9); B'(0;0); C'(-3.5;-16)$
- $\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{33}{10} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$
- $A'(-3;-1); B'(2;0); C'(-2.5;6)$
- a)  $\vec{b}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$                                   b)  $\vec{b}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
- a)  $a = \sqrt{26} = 5.099$                                   b)  $b = \frac{5\sqrt{17}}{2} = 10.31$
- $\overline{OA} = 5; \overline{OB} = 10; \overline{OC} = \sqrt{29} = 5.385$

### Lösungen zu Übungen 43

- $A(3;2;0); B(0;2;-1); C(2;0;1)$
- Skizze
- a)  $x = 5; y = -\frac{2}{3}; z = -\frac{3}{2}$                                   b)  $x = -3; y = 2; z = 2$
- Skizze
- a)  $E = (4; 2; 0), F = (4; 0; 1), G = (0; 2; 1), H = (4; 2; 1)$   
b)  $(2; 0; 0), (4; 1; 0), (2; 2; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 0.5), (4; 0; 0.5), (4; 2; 0.5), (0; 2; 0.5),$   
 $(2; 0; 1), (4; 1; 1), (2; 2; 1), (0; 1; 1)$   
c)  $(2; 1; 0), (2; 0; 0.5), (4; 1; 0.5), (2; 2; 0.5), (0; 1; 0.5), (2; 1; 1)$   
d)  $(2; 1; 0.5)$
- $B' = (1; -4; 6)$

17.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1.9 \\ \frac{11}{15} \end{pmatrix}$

18. a)  $A' = (3; -4; -2)$

c)  $A' = (-3; -4; 2)$

19. a)  $a = 17$

20.  $\overline{OA} = 9; \overline{OB} = 9; \overline{OC} = \sqrt{26} = 5.099$

21.  $z = \pm 36$

22. a)  $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}' = \begin{pmatrix} 6.527 \\ -2.720 \\ 7.071 \end{pmatrix}; \vec{c}' = \begin{pmatrix} -5.774 \\ 5.774 \\ -5.774 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{a}' = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}' = \begin{pmatrix} -6.527 \\ 2.720 \\ -7.071 \end{pmatrix}; \vec{c}' = \begin{pmatrix} 5.774 \\ -5.774 \\ 5.774 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}' = \begin{pmatrix} 0.653 \\ -0.272 \\ 0.707 \end{pmatrix}; \vec{c}' = \begin{pmatrix} -0.577 \\ 0.577 \\ -0.577 \end{pmatrix}$

d)  $\vec{a}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}' = \begin{pmatrix} -0.653 \\ 0.272 \\ -0.707 \end{pmatrix}; \vec{c}' = \begin{pmatrix} 0.577 \\ -0.577 \\ 0.577 \end{pmatrix}$

b)  $A' = (-3; 4; 2)$

d)  $A' = (-3; -4; 2)$

b)  $b = 9$

## Lösungen zu Übungen 44

23. a)  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

24.  $y_1 = 6; y_2 = -12$

25. a) 32

26. a) 35.852

27. a)  $\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

e)  $\begin{pmatrix} 13 \\ -12 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d)  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) 33.455

b) 31.125

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 3 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

f)  $d_2 = -18$

28. a)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$  b)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
- c)  $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  d)  $d_1 = -6; d_3 = -1$
29. a)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  b)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$
- c)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$  d)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$
30. a)  $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  b)  $\begin{pmatrix} 0.5 \\ -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$
31.  $y = 15.5$
32.  $b_2 = 3; b_3 = -2; c_1 = -2; c_2 = -6; c_3 = 4 \rightarrow b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$
33.  $S_1(18;18); S_2(2;-12); S_3(-14;0)$
34.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$
35.  $C(0;1;9); D(-2;-6;5)$
36.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$
37. a)  $P_1(2;0); P_2(0;14)$   
b)  $P_1(-2.214;0;0); P_2(0;-5.167;0); P_3(0;0;15.5)$
38.  $P_1(4;0); P_2(17.33;0)$
39.  $P_1(0;3.870;0); P_2(0;6.880;0)$
40. a) ja (linear unabhängig) b) nein (kollinear)
41. a) ja (linear unabhängig) b) nein ( $\vec{a}/\vec{b}$  kollinear)
- c) ja (linear unabhängig) d) nein (linear abhängig)
42. a)  $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b}$  b)  $\vec{d} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$
43. a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  b)  $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$c) \begin{pmatrix} 12.5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = 12.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \\ 4 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$44. \quad a) \quad \vec{e}_a = \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \vec{e}_b = \begin{pmatrix} -0.514 \\ 0.857 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \vec{e}_c = \begin{pmatrix} 0.816 \\ -0.408 \\ -0.408 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad \vec{e}_d = \begin{pmatrix} 0.845 \\ -0.169 \\ 0.507 \end{pmatrix}$$

## 18 Das Skalarprodukt

### Lösungen zu Übungen 45

1. a) 5  
c) -1  
e) 2
2. a) 120°  
c) 139.764°  
e) 75.821°
3. a) 180°  
c) 19.188°  
e) nicht lösbar in  $G = \mathbb{R}$
4. a)  $\alpha = 44.215^\circ$ ;  $\beta = 52.125^\circ$ ;  $\gamma = 83.660^\circ$   
b)  $\alpha = 100.091^\circ$ ;  $\beta = 38.754^\circ$ ;  $\gamma = 41.155^\circ$
5.  $\alpha = 84.094^\circ$ ;  $\beta = 90^\circ$ ;  $\gamma = 130.601^\circ$ ;  $\delta = 55.305^\circ$
6. 72.508° bzw. 107.492°
7. a)  $n = -1$   
c)  $n_1 = 2$ ;  $n_2 = -2$
8.  $\angle AMB = 97.407^\circ$ ;  $\angle FMG = 44.129^\circ$
9. a) 60°  
b)  $-12\sqrt{2} = -16.971$   
d) 7  
f) -13  
b) 45°  
d) 90°  
f) 91.328°  
b) 60°  
d) 90°  
f)  $\varphi_1 = 120^\circ$ ;  $\varphi_2 = 60^\circ$   
b)  $n_1 = 1$ ;  $n_2 = -1$   
b) 90° c) 60°

## Lösungen zu Übungen 46

10. a) -6  
c) 18
11. a) skalar; 1  
c) vektoriell;  $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$   
e) undefiniert
12. a)  $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = a^2 - b^2$   
c)  $4n\vec{a} + n\vec{b}$
13.  $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \neq (a_1a_1 + a_2a_2)(b_1b_1 + b_2b_2)$
- b) 8  
d) -60  
b) skalar; 0  
d) skalar; 24  
f) skalar; 8  
b)  $6\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2$   
d)  $9\vec{a}^2 - 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2$

## Lösungen zu Übungen 47

14. a)  $\vec{w}_\alpha \cdot \vec{w}_\beta = 0$   
c)  $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}; \vec{c} \cdot \vec{b} = c \cdot b \cdot \cos \alpha$
15. a)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$   
c) zusätzlich  $\vec{c} = \vec{p} + \vec{q}$
16.  $\vec{AB} = \vec{DC}; \vec{BC} = \vec{AD}; \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$
17. a)  $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$   
b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
18.  $\begin{pmatrix} 3.3 \\ -4.94 \\ 0.82 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3.3 \\ 4.94 \\ -0.82 \end{pmatrix}$
19. a) -5  
b) 2
20.  $x = -6; z = 2$
21.  $(y_1 = -1.5; z_1 = 1.5); U_1 = 14; A_1 = 12.25; (y_2 = 0.75; z_2 = 0.75); U_2 = 13; A_2 = 10.563$
22.  $P_1(0;0;4); P_2(0;0;-2)$
23. a) -0.5  
b) 2
24.  $a^2 + c^2 = b^2$

## Lösungen zu Übungen 48

25. a)  $\varphi_x = 59.036^\circ$ ;  $\varphi_y = 30.964^\circ$   
b)  $\varphi_x = 70.093^\circ$ ;  $\varphi_y = 20.547^\circ$ ;  $\varphi_z = 85.117^\circ$   
c)  $\varphi_x = 71.565^\circ$ ;  $\varphi_y = 90^\circ$ ;  $\varphi_z = 18.435^\circ$   
d)  $\varphi_x = 69.590^\circ$ ;  $\varphi_y = 35.538^\circ$ ;  $\varphi_z = 62.290^\circ$
26.  $P_1(9.246;0;0)$ ;  $P_2(-7.246;0;0)$
27.  $\varphi_z = 65.427^\circ$
28.  $a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ ;  $a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$
29.  $C_1(1;-7)$ ;  $C_2(5;1)$

## Lösungen zu Übungen 49

30. a)  $a_b = \sqrt{5} = 2.236$ ;  $\vec{a}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$   
b)  $a_b = -\sqrt{38} = -6.164$ ;  $\vec{a}_b = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$
31. a)  $5; \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$       b)  $-3.790; \begin{pmatrix} -2.874 \\ -2.011 \\ 1.437 \end{pmatrix}$
32. a)  $2\sqrt{5} = 4.472$       b) 6.403
33.  $H_c(2; 0)$ ;  $F = 45$
34.  $C_1(-1; 7; -10)$ ;  $C_2(-9; -1; -6)$ ;  $F_1 = F_2 = 10.062$
35. 14.731
36.  $\vec{AD}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{AD}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$
37. 81.876



## Lösungen zu Übungen 50

$$38. \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.30 \\ 1.70 \\ 1.40 \end{pmatrix} = 9.10 \text{ Fr.}$$

$$39. \text{ a) } 1350 \text{ Zeiteinheiten}$$

$$\text{b) } K = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \left[ 0.05 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.25 \\ 0.20 \end{pmatrix}$$

$$40. 168.60 \text{ Fr.}$$

$$41. 68.885^\circ$$

$$42. \text{ a) } 123 \text{ J}$$

$$\text{b) } 29.291^\circ$$

$$43. 611.068 \text{ N}$$

## 19 Vektorielle Darstellung von Geraden

Hinweis: Zu jeder Geraden gibt es unendlich viele Parametergleichungen. In den Lösungen ist eine dieser Möglichkeiten aufgeführt.

### Lösungen zu Übungen 51

$$1. \text{ a) } g: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } g: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } g: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ a) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ a) } g_x: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; g_y: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; g_z: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g_{xy}: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; g_{yz}: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; g_{xz}: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ a) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

5. a)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$       b)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
- c)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$       d)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$
6.  $g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}; g_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}; g_3: \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix};$   
 $g_4: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; g_5: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$
7.  $g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; g_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; g_3: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};$   
 $g_4: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
8. a)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$       b)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
9. a)  $y = -2x + 5$       b)  $y = 4x - 7$
10. a)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$       b)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
11. a)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$       b)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
12.  $y = -\frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$

## Lösungen zu Übungen 52

13. a) Punkte auf  $g$ : z. B.  $(2; -1); (6; 0)$ ; Punkte neben  $g$ : z. B.  $(2; 0); (2; -2)$   
b) Punkte auf  $g$ : z. B.  $(3; -4; 1); (5; -2; 1)$ ;  
Punkte neben  $g$ : z. B.  $(3; -4; 0); (3; -3; 1)$
14. a) Punkte auf  $g$ : A, C; Punkte neben  $g$ : B  
b) Punkte auf  $g$ : B, C; Punkte neben  $g$ : A
15. a)  $P = (7; 0; 3)$       b)  $Q = (1; 3; 0)$
16. a) Ja      b) Nein
17. a) Ja      b) Ja
18. a)  $d = \frac{11}{5} = 2.2$       b)  $d = 3$   
c)  $d = \frac{11\sqrt{5}}{5} = 4.919$       d)  $d = 5$   
e)  $d = \frac{\sqrt{105}}{5} = 2.049$       f)  $d = \frac{6\sqrt{65}}{13} = 3.721$

19.  $d_x = \sqrt{5} = 2.236$ ;  $d_y = 2\sqrt{5} = 4.472$ ;  $d_z = \sqrt{17} = 4.123$   
 20.  $d = \frac{\sqrt{4830}}{21} = 3.309$   
 21. a)  $Q = \left(\frac{63}{29}, \frac{89}{29}\right)$  b)  $Q = \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$   
 22.  $P' = (-4; 4; 0)$

### Lösungen zu Übungen 53

23.  $S = (1; 2; 2)$   
 24. a)  $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  b)  $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$   
 c)  $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   
 25.  $g, h$ : schneiden sich;  $g, i$ : identisch;  $g, k$ : schneiden sich;  $h, i$ : schneiden sich;  
 $h, k$ : parallel;  $i, k$ : schneiden sich  
 26.  $g_1, g_2$ : schneiden sich;  $g_1, g_3$ : parallel;  $g_1, g_4$ : windschief;  $g_1, g_5$ : windschief;  
 $g_2, g_3$ : schneiden sich;  $g_2, g_4$ : windschief;  $g_2, g_5$ : windschief;  $g_3, g_4$ : schneiden sich;  
 $g_3, g_5$ : windschief;  $g_4, g_5$ : schneiden sich  
 27. a) windschief b) parallel  
 c) identisch d) schneiden sich  
 28. schneiden sich  
 29. a) nein (windschief) b) ja (parallel)  
 30. a) parallel zur y-Achse b) parallel zur x-z-Ebene  
 c) schneidet die x-Achse d) geht durch den Ursprung

### Lösungen zu Übungen 54

31. a)  $S = (3; 5)$ ;  $\varphi = 81.87^\circ$   
 b)  $S = \left(\frac{125}{31}; -\frac{132}{31}\right) = (4.032; -4.258)$ ;  $\varphi = 30.32^\circ$   
 c)  $S = (-3; -1; 1)$ ;  $\varphi = 71.24^\circ$   
 d)  $S = (-13; 8; 13)$ ;  $\varphi = 51.63^\circ$   
 32. a)  $S = \left(\frac{123}{73}; \frac{181}{73}\right) = (1.685; 2.479)$ ;  $\varphi = 89.22^\circ$   
 b)  $S = \left(\frac{26}{7}; \frac{10}{7}; \frac{12}{7}\right) = (3.714; 1.429; 1.714)$ ;  $\varphi = 58.60^\circ$   
 33. a)  $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  b)  $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c)  $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d)  $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

34. a)  $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$       b)  $i: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- c)  $k: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 23 \\ -10 \end{pmatrix}$
35. a)  $d = \sqrt{26} = 5.099$       b)  $d = \frac{7\sqrt{6}}{3} = 5.715$
36.  $F = \frac{\sqrt{115}}{4} = 2.681$
37. a) schneiden sich;  $S = (2; 7; -3)$ ;  $\varphi = 66.40^\circ$   
 b) windschief;  $d = \sqrt{33} = 5.745$   
 c) parallel;  $d = 8.297$   
 d) identisch; ( $\varphi = 0^\circ$ ;  $d = 0$ )

## Lösungen zu Übungen 55

38. a)  $A: \vec{r} = \begin{pmatrix} 250 \\ -750 \\ 250 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ ;  $B: \vec{r} = \begin{pmatrix} -600 \\ -1200 \\ 800 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ -10 \end{pmatrix}$
- b)  $A_{60} = (-2150; 450; 1450)$ ;  $B_{60} = (0; 600; 200)$
- c)  $t = 0$ : A: 250 m. ü. Boden, B: 800 m. ü. B.;  $t = 40$ : A: 1050 m. ü. B.,  
 B: 400 m. ü. B.
- d) A: 1283.6 m; B: 655.7 m
- e) A: 176.4 km/h; B: 119,4 km/h
39. A: z-Koordinate des Richtungsvektors positiv, also Steigflug;  
 B: z-Koordinate des Richtungsvektors negativ, also Sinkflug;  
 z-Koordinate gleich 0: konstante Höhe
40.  $24.09^\circ$ ; 77.5 s
41.  $17.55^\circ$ ; 80 s
42.  $S = (-350; -450; 550)$ ; kollidieren nicht, da  $t_A \neq t_B$
43. 295.8 m
44.  $K: \vec{r} = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ; 6 Min. 30 s
45. a)  $U_1: P_0 = (30; 20; 0), P_{20} = (70; 40; -120)$ ;  
 $U_2: P_0 = (150; 140; -80), P_{20} = (130; 100; 160)$
- b) (170; 180; 0)
- c)  $U_1$ : 23.05 km/h;  $U_2$ : 16.50 km/h
- d)  $U_1$ : 21.6 km/h;  $U_2$ : 14.4 km/h
- e)  $U_1$ : 2 Min. 10 s ;  $U_2$ : 4 Min.

46. a)  $U_1, K$ : nein;  $U_2, K$ : ja  
 b)  $U_1, K$ : nein;  $U_2, K$ : ja, da  $t_K = t_{U2}$   
 c) z. B. anderen Startzeitpunkt für Kugel wählen  
 d)  $U_1, K$ :  $d_{min} = 94.64$  m;  $U_2, K$ :  $d_{min} = 0$  m
47. a) ja,  $S = (110; 60; -240)$  b) ja,  $t_{U1} = t_{U2}$   
 c) Tauchbahnen sind neu windschief

## 20 Vektorielle Darstellung der Ebene

Hinweis: Zu jeder Ebene gibt es unendlich viele Parametergleichungen. In den Lösungen ist eine dieser Möglichkeiten aufgeführt.

### Lösungen zu Übungen 56

1.  $P = (23; 11; 16)$
2.  $y = 37$
3. Punkte auf  $E$ : A, C; Punkte neben  $E$ : B
4. a)  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$   
 b)  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$   
 c)  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ , mit  $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$  folgt: es gibt unendlich viele Lösungen ( $C \in AB$ )
5. a) Nein b) Ja
6. a)  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$   
 b)  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$   
 c)  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$
7.  $E: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
8.  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9. a) rot:  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; gelb:  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  
 grün:  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
- b) rot:  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; gelb:  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  
 grün:  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
10.  $F: \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
11. a)  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$
- b)  $E: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$
- c) wenn  $Q \in g$  bzw.  $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ , z. B.  $Q = (10; 3; -1)$
12.  $F: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$

## Lösungen zu Übungen 57

13. a) ja b) nein ( $g$  schneidet  $E$ )
14. a) ja (schneiden sich),  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$
- b) nein (windschief)
- c) ja (parallel),  $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
15.  $(\frac{11}{4}; 0; 0), (0; \frac{22}{13}; 0), (0; 0; -22)$
16. a) parallel b)  $g \in E_{yz}$
17. a)  $g \in E$  b) parallel
- c) schneiden sich,  $D = (10; 1; 8)$
18.  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6.5 \end{pmatrix}$
19. a)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$  b)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Lösungen zu Übungen 58

20. a)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ -13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$

b)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

21. a)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

c)  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

22. rot-gelb:  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ ; rot-grün:  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{16}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ;

gelb-grün:  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

23. a) parallel

b) schneiden sich