

Lösungen

Mathematik II

Geometrie für Berufsmaturitätsschulen,
2. Auflage

I PLANIMETRIE

1 Winkel

Lösungen zu Übungen 1

- | | |
|--|--|
| 1. a) $180 - \beta = \alpha + \gamma$ | b) $\varphi = 180 - \beta$ |
| 2. a) $\alpha = 137^\circ$ | b) $\alpha = 105^\circ; \beta = 120^\circ$ |
| c) $\alpha = 45^\circ$ | d) $\alpha = 22^\circ; \beta = 124^\circ$ |
| 3. $\alpha = 20^\circ$ | |
| 4. $\varepsilon = 78^\circ$ | |
| 5. a) $\alpha = 58^\circ; \beta = 32^\circ; \gamma = 64^\circ$ | b) $\alpha = 10^\circ; \gamma = 76^\circ$ |
| c) $\alpha = 26^\circ; \beta = 112^\circ$ | d) $\alpha = 63^\circ$ |
| 6. a) $\beta = 3\alpha; \beta = 114^\circ$ | b) $\beta = 4\alpha; \beta = 152^\circ$ |
| 7. a) $\varepsilon = 180^\circ - 2\alpha$ | b) $\varepsilon = \frac{\alpha + 2\beta}{2}$ |
| 8. a) $\varepsilon = 100^\circ$ | b) $\varepsilon = 180^\circ - 2\gamma$ |
| c) $\varepsilon = 0^\circ; \text{ parallel}$ | d) kein Schnittpunkt, nicht parallel |

Lösungen zu Übungen 2

- | | |
|---|---------------------------------|
| 9. a) $\gamma = \alpha + \alpha'; \varphi = 2\alpha + 2\alpha'$ | b) Formel aus a) gilt allgemein |
| c) $\gamma + \delta = 180^\circ$ | |
| 10. a) $\alpha = 29^\circ$ | b) $\beta = 45^\circ$ |
| c) $\gamma = 54^\circ$ | d) $\delta = 21^\circ$ |
| 11. $\beta = 90^\circ - \alpha$ | |
| 12. a) $\alpha = 12.857^\circ$ | b) $\beta = 36^\circ$ |

2 Dreiecke

Lösungen zu Übungen 1

- | | | |
|--|------------------------|-------------|
| 1. a) 1 Lösung | b) unendlich | c) 1 Lösung |
| d) 1 Lösung | e) 2 Lösungen | f) 1 Lösung |
| 2. Konstruktionen | | |
| 3. Konstruktion | | |
| 4. Konstruktion | | |
| 5. a) 13.4 cm^2 | b) 16.96 m^2 | |
| 6. a) $h_a = 56 \text{ cm}; h_b = 24 \text{ cm}$ | b) $c = 2.5 \text{ m}$ | |

Lösungen zu Übungen 2

7. a) $h_a = 2.078 \text{ m}$

b) $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

8. $h = 2.4 \text{ m}$

9. a) $x = 0.96 \text{ m}$

b) $x = \frac{4-a^2}{4}$

10. 6.325 cm

11. $A = 1611.955 \text{ cm}^2$

12. $4.123a$

13. $a = 1.932 r$

14. $a = \sqrt{rs}$

15. $h = 4.42 \text{ m}$

16. $h = 3.46 \text{ cm}$

17. $b = 3.2 \text{ cm}$

18. a) Halbkreis: Durchmesser teilen 1:5

b) Halbkreis: Durchmesser teilen 1: $\frac{4}{3}$

Lösungen zu Übungen 3

19. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

20. $b = a\sqrt{2}$

21. a) $c = 10 \text{ cm}; b = 8.66 \text{ cm}$

b) $c = 2a; b = a\sqrt{3}$

22. a) $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b) $A = \frac{r^2 3\sqrt{3}}{4}$

c) $A = 3p^2\sqrt{3}$

23. a) $A = 0.375 \text{ m}^2$

b) $A = 0.504 \text{ m}^2$

c) $A = 291.6 \text{ m}^2$

d) $A = 484 \text{ cm}^2$

24. $A = \frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{3})$

25. a) $A = 2s^2(2 - \sqrt{2})$

b) $U = 8s(2 - \sqrt{2})$

26. $A = \frac{a^2}{4}(3 + 2\sqrt{3})$

27. $A = \frac{c^2}{8}(2 - \sqrt{3})$

28. $x = 24 \text{ cm}$

29. $s = 4\sqrt{5} \text{ cm} \rightarrow 8.944 \text{ cm}$

30. $x_1 = 0.7 \text{ cm}; x_2 = 10.3 \text{ cm}$

9. $A = \frac{\pi}{4} s^2$
 10. $x = r(\sqrt{5} - 1)$
 11. $A = 1.112r^2$

Lösungen zu Übungen 2

12. a) $A = 13.09 \text{ cm}^2$
 c) $r = 5.642 \text{ cm}$
 13. $\alpha = 229.183^\circ$
 14. $b = \frac{s \cdot \pi}{3}$
 15. a) $A = s^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right); U = s \cdot \pi$
 c) $A = a^2 \left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right); U = \frac{2s \cdot \pi}{3}$
 16. a) $A = r^2 (\sqrt{3} - 2\pi + 6); U = 2r(2\pi + 3)$
 c) $A = \frac{R^2}{2} \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right); U = 4\pi \cdot R$
 17. a) $A = r^2$
 18. $A = r^2 \left(2\sqrt{2} + 2 + \frac{5\pi}{4} \right)$
 19. $A = a^2 \left(\frac{\pi - 2\sqrt{2} + 1}{4} \right)$
 20. $b_1 : b_2 = 1 : 1$
 21. a) $A_1 = A_2 = \frac{s^2}{8} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right)$
 b) $\alpha = 71.62^\circ$
 b) $A = s^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right); U = 2s \cdot \pi$
 d) $A = \frac{s^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right); U = \frac{3s \cdot \pi}{2}$
 b) $A = a^2 \left(\frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{2} - \pi + 1 \right); U = \frac{a \cdot \pi \sqrt{2}}{2}$
 d) $A = \frac{s^2}{4} (\pi - \sqrt{3}); U = s \left(3 + \frac{\pi}{2} \right)$
 b) $A = r^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
 b) $U_1 = \frac{s}{2} \left(4 + \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \right); U_2 = \frac{s}{2} (4 + \pi - \sqrt{2})$

5 Zentrische Streckung und Ähnlichkeit

Lösungen zu Übungen 1

1. Es gilt: $\overline{SA} : \overline{AA'} = \overline{SB} : \overline{BB'}$ oder $\overline{SA} : \overline{SA'} = \overline{SA} : (\overline{SA} + \overline{AA'})$ oder ...
 2. a) $f = 16 \text{ cm}$
 b) $e = 6 \text{ cm}$
 c) $a' = 8\frac{1}{3} \text{ cm}$
 d) $b' = 8 \text{ cm}$
 3. $f = 3.5 \text{ cm}; e = 9 \text{ cm}; A_{\Delta ADE} = 45 \text{ cm}^2$
 4. $x = \frac{a(c-b)}{b}; y = \frac{cd}{b}; z = \frac{be}{c-b}$
 5. $x = 2\frac{2}{3} \text{ cm}$

II TRIGONOMETRIE

1 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Lösungen zu Übungen 1

- | | |
|--|--|
| 1. a) 0.576 | b) 1.370 |
| c) 0.002 | |
| 2. a) 8.021° | b) 72° |
| c) 68.755° | |
| 3. a) 0.4067 | b) 1.0000 |
| c) 0.5878 | |
| 4. a) $b = 34.92$ cm; $c = 47.37$ cm; $\beta = 47.5^\circ$ | b) $a = 75.718$ m; $b = 78.408$ m; $\alpha = 44^\circ$ |
| c) $a = 21.603$ m; $c = 27.490$; $\alpha = 51.8^\circ$ | d) $a = 31.686$ mm; $c = 66.091$ mm; $\beta = 1.071$ |
| e) $a = 25.845$ cm; $b = 13.154$ cm; $\beta = 0.471$ | f) $b = 13.042$ mm; $c = 19.134$ mm; $\alpha = 0.821$ |
| 5. a) 0.1650 | b) 1.000 |
| c) 0.5403 | |
| 6. a) $\beta = 66.5^\circ$; $c = 18.537$ dm; $a = 7.392$ dm | b) $\alpha = 47.5^\circ$; $b = 52.7$ m; $a = 57.508$ m |
| c) $\alpha = 0.671$; $c = 53.09$ cm; $b = 41.60$ cm | d) $\beta = 1.121$; $a = 9.134$ dm; $b = 18.909$ dm |
| 7. a) 0.0875 | b) 2.0194 |
| c) 0.6421 | |
| 8. a) $\beta = 51.5^\circ$; $c = 67.468$ m; $b = 52.801$ m | b) $\beta = 1.271$; $a = 5.319$ mm; $b = 17.196$ mm |
| c) $\alpha = 57.5^\circ$; $c = 106.712$ mm; $b = 57.336$ mm | d) $\beta = 0.571$ a = 3.894 dm; $c = 4.627$ cm |
| e) $\alpha = 83^\circ$; $b = 36.561$ m; $a = 297.764$ m | f) $\alpha = 74^\circ$; $a = 255,279$ cm; $c = 265.566$ cm |
| 9. a) $\frac{a}{c} = \frac{a}{c}$ | b) $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \rightarrow a^2 + b^2 = c^2$ |
| c) $\frac{b}{c} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} \rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$ | d) $1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{\frac{b^2}{c^2}} \rightarrow a^2 + b^2 = c^2$ |
| 10. a) $\frac{5}{4}$ | b) $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$ |
| c) $\frac{1}{2}$ | d) $\frac{1}{2}$ |

Lösungen zu Übungen 2

- | | | |
|---|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 11. a) $30^\circ \rightarrow \frac{\pi}{6}$ | b) $83.826^\circ \rightarrow 1.463$ | c) $21.274^\circ \rightarrow 0.371$ |
| 12. a) $41.410^\circ \rightarrow 0.723$ | b) $\beta =$ nicht definiert | c) $109.259^\circ \rightarrow 1.907$ |
| 13. a) $37.235^\circ \rightarrow 0.650$ | b) $33.5^\circ \rightarrow 0.585$ | c) $89.427^\circ \rightarrow 1.561$ |
| 14. a) $\delta = 20^\circ$ | b) $\delta = 0.617^\circ$ | c) $\delta = 65.9^\circ$ |
| d) $\delta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ | e) $\delta = 44.996^\circ$ | f) $\delta = 74.948^\circ$ |

15. a) $\alpha = 61.288^\circ$; $b = 5.861$ m; $\beta = 28.712^\circ$ b) $\alpha = 32.312^\circ$; $\beta = 57.688^\circ$; $c = 13.844$ dm
 c) $c = 181.22$ cm; $a = 172.350$ cm; $\alpha = 72^\circ$ d) $\alpha = 43.813^\circ$; $\beta = 46.187^\circ$; $b = 84.427$ mm
 e) $a = 1.625$ m; $b = 1.483$ m; $\beta = 42.4^\circ$ f) $\alpha = 59.003^\circ$; $\beta = 30.997^\circ$; $a = 171.438$ m
 g) $\alpha = 41.81^\circ$; $\beta = 48.19^\circ$; $b = 22.36$ cm h) nicht definiert
 i) $c = 119.357$ mm; $a = 116.919$ mm; $\beta = 11.6^\circ$ j) $\alpha = 66.132^\circ$; $c = 12.357$ m; $\beta = 23.868^\circ$

Lösungen zu Übungen 3

16. a) $\alpha = 5.711^\circ$ b) $\alpha = 16.699^\circ$ c) $\alpha = 45^\circ$
 17. a) $a = 17.633\%$ b) $a = 36.4\%$ c) $a = 274.748\%$
 18. a) $\alpha = 78.778^\circ \rightarrow 500\%$ b) $\alpha = 60.535^\circ \rightarrow 180\%$ c) $\alpha = 36.87^\circ \rightarrow 75\%$
 19. $c = 7.442$ m
 20. $c = 2282.307$ m
 21. $\alpha = 74.038^\circ$
 22. a) $a = 46.321$ cm; $b = 34.905$ m b) $a = 59.867$ cm; $b = 43.496$ m
 c) $\alpha = \frac{\varphi}{2}$; $a = e \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$; $b = e \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$
 23. Winkel zwischen Seite und Diagonale: $\alpha = 23.85^\circ$; $\beta = 66.15^\circ$
 Winkel zwischen den Diagonalen: $\gamma = 132.30^\circ$; $\varphi = 47.70^\circ$
 24. $\gamma = 40^\circ$; $h_c = 70.5$ mm $\rightarrow c = 51.3$ mm; $A = 1807.8$ mm²
 25. $\varphi = 88.854^\circ$; $b = 31.016$ cm; $A = 310.159$ cm²
 26. $A = 121.554$ cm²
 27. $\alpha = 53.951^\circ$
 28. a) $\alpha = 54.736^\circ$ b) $\beta = 35.264^\circ$
 c) $\varphi = 70.529^\circ$ bzw. 109.471°
 29. a) $r = \frac{h}{\tan \alpha}$ b) $r = 19.673$ cm
 30. a) $x = 2.939$ cm b) $x = 2.325$ cm
 c) $x = 2.293$ cm d) $x = 15.969$ cm
 31. $\alpha = 36.87^\circ \rightarrow 90 - \alpha = 53.13^\circ$; $F_R = 225$ N
 32. $F_{Res} = 5694$ N; $F = 21'250.4$ N
 33. $\beta = 28.454^\circ$; $l = 31.847$ mm
 34. $x = 26.086$ m
 35. a) $\alpha = 8.624^\circ$ b) 6:34 Uhr bzw. 17:26 Uhr
 36. $x = 22.6$ m
 37. $x = 1009.325$ m
 38. Distanz = 119.426 m; Höhe = 40.351 m
 39. 352.060 m
 40. $y = 16.857$ m
 41. $h = 2.356$ m; $b = 12.025$ m
 42. $v = 1137.3$ km/h; $b = 5225.341$ km

2 Berechnungen am schiefwinkligen Dreieck

Lösungen zu Übungen 1

1. a) $\sqrt{3}$ b) 0.986 c) 0.282
 d) 0.75 e) 0.971 f) 0.947
2. a) $20.487^\circ; 159.513^\circ$ b) $139.970^\circ; 319.970^\circ$ c) $25.842^\circ; 334.158^\circ$
 d) $180.573^\circ; 359.427^\circ$ e) $87.614^\circ; 267.614^\circ$ f) $126.870^\circ; 233.130^\circ$
3. a) \neq b) \neq c) $=$ d) $=$
4. a) $f \rightarrow <$ b) $f \rightarrow =$ c) $f \rightarrow <$ d) $f \rightarrow >$
5. a) $f \rightarrow >$ b) w c) w d) $f \rightarrow =$
6. $\cos 90^\circ = 0$; $0^\circ \leq \gamma < 90^\circ \rightarrow -2abc \cos \gamma$ negativ; $90^\circ < \gamma \leq 180^\circ \rightarrow -2abc \cos \gamma$ positiv
7. a) $\sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \cos \varphi$ b) $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$
 c) $1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ d) $1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$
8. $\alpha = 0^\circ$: 0 1 0
 $\alpha = 90^\circ$: 1 0 undef.
 $\alpha = 180^\circ$: 0 -1 0
 $\alpha = 270^\circ$: -1 0 undef.
9. a) $r = \frac{s}{2} \cdot \tan \frac{360^\circ}{2 \cdot 6} \rightarrow U = 12 \cdot \tan(30^\circ)$ b) $U = 2n \cdot \tan\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$

Lösungen zu Übungen 2

10. a) $\gamma = 88.6^\circ$; $b = 66.962$ cm; $c = 70.269$ cm
 b) $\gamma = 118.3^\circ$; $a = 22.039$ cm; $b = 11.103$ cm
 c) $\beta = 22.557^\circ$; $\alpha = 123.343^\circ$; $a = 141.557$ mm
 d) $\gamma = 74.339^\circ$; $\alpha = 80.601^\circ$; $c = 68.826$ m oder $\gamma = 55.601^\circ$; $\alpha = 99.399^\circ$; $c = 58.963$ m
 e) $\alpha = 92.247^\circ$; $\gamma = 52.753^\circ$; $a = 11.184$ km oder $\alpha = 17.753^\circ$; $\gamma = 127.247^\circ$; $a = 3.413$ km
 f) $\alpha = 27.398^\circ$; $\beta = 18.602^\circ$; $a = 7.501$ dm; $c = 11.726$ dm
11. a) $\gamma = 180 - \alpha - \beta$; $a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$; $c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$ b) $\alpha = 180 - \beta - \gamma$; $b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$; $c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$
12. $U = 220.821$ cm
13. $w_\alpha = 146.030$ mm
14. a) $\tan(30) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\tan(15) = 2 - \sqrt{3}$

Lösungen zu Übungen 3

15. a) $\alpha = 54.219^\circ$; $\beta = 43.240^\circ$; $\gamma = 82.541^\circ$
 b) $\alpha = 90.967^\circ$; $\gamma = 21.033^\circ$; $a = 33.430$ mm
 c) $c = 2.515$ m; $\alpha = 32.862^\circ$; $\beta = 44.238^\circ$
 d) $\gamma = 38.654^\circ$; $\alpha = 31.367^\circ$; $\beta = 109.979^\circ$
16. a) $\alpha = 37.666^\circ$; $\beta = 17.934^\circ$; $a = 92.278$ cm; $c = 124.604$ cm
 b) $\gamma = 12.374^\circ$; $c = 5.508$ m; $\beta = 20.626^\circ$; $b = 9.055$ m
 c) $\alpha = 60.841^\circ$; $a = 62.618$ cm; $\beta = 71.501^\circ$; $\gamma = 47.658^\circ$
 d) $\gamma = 46.700^\circ$; $b = 26.505$ m; $a = 28.219$ m; $c = 21.747$ m
 e) $a = 7.396$ cm; $c = 10.056$ cm; $\alpha = 45.373^\circ$; $\beta = 30.027^\circ$
 f) $a = 3.693$ mm; $\alpha = 47.353^\circ$; $b = 3.807$ mm; $\gamma = 83.347^\circ$; $c = 4.987$ mm
17. a) $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$; $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a \cdot \sin \gamma}{c}\right)$; $\beta = 180 - \alpha - \beta$
 b) $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta}$; $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a \cdot \sin \beta}{b}\right)$; $\gamma = 180 - \alpha - \beta$
18. a) $b = 3.681$ m; $\beta = 142^\circ$
 b) $\alpha = 84.920^\circ$; $\beta = 95.080^\circ$
 c) $a = 45.861$ mm; $\alpha = 104^\circ$
19. a) $c = 1.764$ mm; $d = 7.972$ mm; $\gamma = 101^\circ$; $\delta = 142^\circ$
 b) $\alpha = 77.364^\circ$; $\beta = 51.318^\circ$; $\gamma = 128.682^\circ$; $\delta = 102.636^\circ$
 c) $b = 9.614$ m; $d = 8.936$ m; $\alpha = 82^\circ$; $\beta = 67^\circ$
20. $a = 16.851$ cm; $b = 26.475$ cm; $c = 26.630$ cm
21. a) $U = 35.037$ dm; $A = 74.160$ dm²
 b) $U = 28.39$ cm; $A = 50.026$ cm²
22. $\alpha = 38.942^\circ$; $\beta = 31.586^\circ$; $\gamma = 109.471^\circ$
23. 55.759° bzw. 124.241°
24. $h = 24.827$ m
25. $V_w = 2943.231$ m³
26. $t = 14.337$ min
27. $h = 1204.485$ m
28. $\overline{PQ} = 804.734$ m
29. $\overline{S_1S_2} = 276.406$ m
30. 33.898 km
31. $x = 1.083$
32. $x = 5.758$ cm
33. $x = \frac{b}{2}(1 - \tan^2 \alpha)$

Lösungen zu Übungen 4

34. $A = \frac{1}{2} pq \cdot \sin \alpha$

35. a) $A = \frac{1}{2} pq = 20 \text{ cm}^2$

b) / c) für $\alpha \neq 90^\circ$: 2 Dreiecke mit gleicher Fläche

36. a) $A = 8445.797 \text{ m}^2$

b) $A = 1070.067 \text{ dm}^2$

37. $\gamma_1 = 32.151^\circ$; $\gamma_2 = 147.849^\circ$ (→es gibt immer 2 Lösungen)

38. $c = 1.705 \text{ dm}$; $b = 3.254 \text{ dm}$

39. a) $A = 13.252 \text{ cm}^2$

b) $A = 36.180 \text{ cm}^2$

c) $A = 37.971 \text{ cm}^2$

d) $A = 14.506 \text{ cm}^2$

e)
$$A = r^2 \left(\frac{\pi \cdot \arcsin\left(\frac{s}{2r}\right)}{180} - \frac{\sin\left(2 \cdot \arcsin\left(\frac{s}{2r}\right)\right)}{2} \right)$$

f)
$$A = \frac{s^2}{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180} - \sin \alpha \right)$$

40. $A = 36.522 \text{ cm}^2$

41. $A = 69.828 \text{ cm}^2$

42. $A = 68.518 \text{ m}^2$

43. $A = 12.616 \text{ cm}^2$

44. $A = 349.613 \text{ mm}^2$

45. $A = 146.153 \text{ cm}^2$

46. $A = 14.799 \text{ mm}^2$

47. $A = 1219.663 \text{ mm}^2$

48. $s = 32.492 \text{ cm}$; $r_u = 52.573 \text{ cm}$; $A_{10} = 8122.992 \text{ cm}^2$

49. a)
$$A_n = \frac{a^2 \cdot n}{4 \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)}$$

b)
$$A_n = r_2 \cdot n \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)$$

c)
$$A_n = \frac{\rho^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)}{2}$$

3 Trigonometrische Funktionen und ihre Graphen

Lösungen zu Übungen 1

1.

	Def.menge	Wertemenge	Periodenlänge	Symm.achsen	Symm.zentren
$\sin x$	\mathbb{R}	$-1 \leq y \leq 1$	2π	$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$	$x = n \cdot \pi, y = 0$
$\cos x$	\mathbb{R}	$-1 \leq y \leq 1$	2π	$x = n \cdot \pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, y = 0$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{x}{2} + n \cdot \pi \right\}$	\mathbb{R}	π	keine	$x = n \cdot \pi, y = 0$

2.

	Nullstellen	Rel. Minima	Rel. Maxima
$\sin x$	$n \cdot \pi$	$-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$	$\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$
$\cos x$	$\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$	$\pi + n \cdot 2\pi$	$n \cdot 2\pi$
$\tan x$	$n \cdot \pi$	$x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, y$ nicht def.	$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, y$ nicht def.

3. a) $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ b) $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\tan 225^\circ = \tan 45^\circ = 1$
 d) $\sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$
4. a) $x = \frac{\pi}{4}$ b) $x = \frac{4\pi}{3}$ c) $x = \frac{2\pi}{3}$
5. a) $-\cos x$ b) $\sin x$ c) $-\sin x$
 d) $-\cos x$
6. a) $2 \cdot \cos x$ b) 0 c) -1
 d) -1 e) 0 f) $2 \cdot \cos x$

Lösungen zu Übungen 2

7. a) Graph b) Jeder y-Wert wird verdreifacht.
 c) Jeder y-Wert wird halbiert. d) Spiegelung an der x-Achse.
8. a) Graph, Periode 2π b) Graph, Periode $\frac{2\pi}{3}$
 c) Graph, Periode 4π d) Graph, $y = \cos(-x) = \cos x$
9. a) Graph b) Verschiebung um $\frac{\pi}{3}$ nach rechts (positiv)
 c) Verschiebung um $\frac{3\pi}{4}$ nach links (negativ)
10. a) Graph
 b) Verschiebung um +1 in y-Achsenrichtung nach oben
 c) Verschiebung um -2 in y-Achsenrichtung nach unten
11. a) – h) Graph

12. a) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ b) $y = \frac{1}{2} \cdot \sin(4x) - 2.5$
 c) $y = 3 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ d) $y = \sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 2$
13. a) $y = -3 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ b) $y = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) + 2$
 c) $y = \frac{3}{2} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}$ d) $y = \cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\right) - 2$
14. a) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$ b) $y = \frac{1}{2} \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right) - 5$
15. a) $y = 2 \sin\left(\frac{1}{3}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1 \rightarrow$ strecken mit Faktor 2 in y-Richtung; strecken mit Faktor 3 in x-Richtung;
 schieben um $\frac{\pi}{2}$ nach links; schieben um 1 Einheit nach oben
 b) $P(0/2)$ c) $p = 6\pi$
 d) $A = 2$ e) $x_n = 3\pi$
 f) $H(\pi/3)$ g) $T(4\pi/-1)$
16. a) $y = \cos\left(\frac{5}{2}\left(x - \frac{\pi}{10}\right)\right) - \frac{1}{2} \rightarrow$ strecken mit Faktor $\frac{2}{5}$ in x-Richtung;
 schieben um $\frac{\pi}{10}$ nach rechts; schieben um $\frac{1}{2}$ nach unten
 b) $P(0/0.207)$ c) $p = \frac{4\pi}{5}$
 d) $A = 1$ e) $x_n = 0.733$
 f) $H(0.314/0.5)$ g) $T(1.574/-1.5)$

Lösungen zu Übungen 3

17. a) $N\left(n \cdot \pi - \frac{c}{b}/0\right)$; Abstand: $\frac{\pi}{b}$
 b) Amplitude: wird verdoppelt; Lage neu: $N\left(n \cdot \pi - \frac{c}{2b}/0\right)$; Abstand: wird halbiert
 c) Amplitude: wird halbiert; Lage neu: $N\left(n \cdot \pi - \frac{c}{2b}/0\right)$; Abstand: bleibt
 d) Amplitude: bleibt; Lage: bleibt; Abstand: wird verdoppelt
 e) $|a| > 1 \rightarrow$ Streckung vertikal; $0 < |a| < 1 \rightarrow$ Stauchung vertikal
 $b > 1 \rightarrow$ Stauchung horizontal; $0 < b < 1 \rightarrow$ Streckung horizontal
18. a) $A = 200.0 \text{ V}$; $T = \frac{1}{25} \text{ s}$; $t_0 = 0.04 \text{ s}$; $f = 25 \text{ Hz}$; $\varphi = -0.683$ b) $U = -126.225 \text{ V}$
 c) $U = 126.225 \text{ V}$ d) $x_1 = 0.00697 \text{ s}$ e) $x_0 = 0.0143 \text{ s}$
19. $I = 30 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t)$
20. $P(t) = 30 \cdot \sin\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$

4 Goniometrie

Lösungen zu Übungen 1

- | | |
|---|--|
| 1. a) $\cos \alpha$ | b) $\sin \alpha$ |
| c) 1 | d) $\frac{1}{\sin \alpha}$ |
| e) $2 \cdot \sin^2 \alpha$ | f) 1 |
| 2. a) $\cos \alpha = 0.842$; $\tan \alpha = 0.642$ | b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5} = 0.917$; $\tan \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2} = 2.291$ |
| c) $\sin \alpha = 0.933$; $\cos \alpha = 0.359$ | |

Lösungen zu Übungen 2

- | | |
|---|--|
| 3. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{AD}{SD}$ | |
| 4. a) $\cos(240^\circ + 90^\circ) = -\sin(240^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$ | b) $\sin(150^\circ - 60^\circ) = \sin(90^\circ) = 1$ |
| 5. a) $\frac{84}{85}$; $-\frac{36}{85}$; $\frac{13}{85}$; $\frac{77}{85}$; $\frac{84}{13}$; $-\frac{36}{77}$ | b) $\frac{204}{325}$; $\frac{36}{325}$; $-\frac{253}{325}$; $\frac{323}{325}$; $-\frac{204}{253}$; $\frac{36}{323}$ |
| 6. a) $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta$ | b) $-2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$ |
| c) $1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta$ | d) $\tan \alpha + \tan \beta$ |

Lösungen zu Übungen 3

- | | |
|--|--|
| 7. a) $\frac{1}{\tan^2 \alpha} - 1$ | b) $1 - \tan^2 \alpha$ |
| c) -1 | d) 2 |
| 8. a) $\cos \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ | b) $\frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$ |
| c) $4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 8 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha$ | d) $1 - 8 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ |
| 9. a) z.B. $\alpha = 30^\circ$: $1 \neq \frac{3}{2}$ | b) z.B. $\alpha = 30^\circ$: $0 \neq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ |
| 10. a) -0.936 | b) 0.572 |
| c) -0.882 | d) -1.624 |
| 11. a) $\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$ | |
| b) $\cos^2 \alpha \cdot \cos \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta$ | |

12. a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
 c) $\sqrt{3} + 2$ d) $\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$
 e) $-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
13. a) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)$
 c) $\frac{\tan \alpha - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \cdot \tan \alpha}$ d) $\frac{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}}{4} \cdot \cos \alpha - \frac{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}}{4} \cdot \sin \alpha$
14. a) 0 b) -1
15. a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ b) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
 c) $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

Lösungen zu Übungen 4

16. a) $L = \{45^\circ; 225^\circ\}$ b) $L = \{74^\circ; 254^\circ\}$
 c) $L = \{68.2^\circ; 248.2^\circ\}$ d) $L = \{50^\circ; 170^\circ\}$
 e) $L = \{167^\circ; 347^\circ\}$ f) undef
17. a) $L = \{45^\circ; 225^\circ\}$ b) $L = \{135^\circ; 315^\circ\}$
 c) $L = \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ; 270^\circ; 360^\circ\}$ d) $L = \{0^\circ; 180^\circ; 360^\circ\}$
18. a) $L = \{32.405^\circ; 147.595^\circ\}$ b) $L = \{69.174^\circ; 249.174^\circ\}$
 c) $L = \{18.789^\circ; 327.211^\circ\}$ d) $L = \{85.5^\circ; 94.5^\circ; 274.5^\circ; 265.5^\circ\}$
19. a) $L = \{57.995^\circ; 237.995^\circ\}$ b) $L = \{66.422^\circ; 293.578^\circ\}$
 c) $L = \{54.404^\circ; 125.596^\circ\}$ d) $L = \{26.565^\circ; 206.565^\circ\}$
20. a) $L = \{126.870^\circ; 233.130^\circ\}$ b) $L = \{53.130^\circ; 126.870^\circ; 233.130^\circ; 306.870^\circ\}$
 c) $L = \{0^\circ; 45^\circ; 180^\circ; 225^\circ; 360^\circ\}$ d) $L = \{30^\circ; 150^\circ\}$
21. a) $L = \{35.264^\circ; 144.736^\circ; 215.264^\circ; 324.736^\circ\}$ b) $L = \{53.234^\circ; 126.766^\circ; 233.234^\circ; 306.677^\circ\}$
 c) $L = \{45^\circ; 135^\circ; 225^\circ; 315^\circ\}$ d) $L = \{90^\circ\}$
22. a) $L = \{0^\circ; 60^\circ; 180^\circ; 300^\circ; 360^\circ\}$ b) $L = \{111.471^\circ; 248.529^\circ\}$
 c) $L = \{0^\circ; 75.964^\circ; 180^\circ; 255.964^\circ; 360^\circ\}$ d) $L = \{106.307^\circ; 253.693^\circ\}$
23. a) $L = \{60^\circ; 120^\circ; 240^\circ; 300^\circ\}$ b) $L = \{90; 270\}$
24. a) $L_x = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}; L_y = \{-1\}$ b) $L_x = \left\{ \frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}; \frac{23\pi}{12} \right\}; L_y = \{0.5\}$
 c) $L_x = \{ \}; L_y = \{2.866\}$ d) $L_x = \{2.191; 5.333\}; L_y = \{-3.5\}$
25. a) $L_{x/y} = \{0/0; \pi/0; 2\pi/0\}$ b) $L_{x/y} = \{0.896/1.250; 2.246/-1.250\}$

III STEREOMETRIE

1 Grundlagen

Lösungen zu Übungen 1

1. a) Skizze
b) z.B. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AG} \cap \overline{BH}$; $\overline{AB} = \overline{BA}$; $ABC \parallel EFG$; $ABC = BCD$; $ABD \cap CGF$
2. a) schneiden sich b) sind windschief c) 48.190° d) 50.768°
3. a) 45° b) 20.705° c) 34.54°

2 Prisma und Zylinder

Lösungen zu Übungen 1

1. a) $V = 900$; $S = 770$ b) $V = 10b^3$; $S = 42b^2$ c) $V = 11c^3$; $S = 38c^2$ d) $V = 1026$; $S = 914$
2. 13 cm
3. a) nein b) 5682 cm^2 c) 2.807 kg
4. $a^2\sqrt{2}$
5. a) $V = \frac{k^3\sqrt{3}}{9}$ b) $S = 2k^2$ c) $l = 4\sqrt{3} \cdot k$
6. a) n^3 b) $\frac{1}{n^3}$ c) $\cdot n$ d) $27; \frac{1}{27}; \cdot 3$
7. $a = 0.424 \text{ m}$; $b = 0.707 \text{ m}$; $c = 1.131 \text{ m}$
8. $l = 6.257 \text{ cm}$; $b = 8.849 \text{ cm}$; $h = 10.837 \text{ cm}$
9. a) Skizze b) $A = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$
10. 40%
11. 25.883%
12. 329.102%
13. 61.059 kg
14. $d = 0.780 \text{ dm}$
15. 1.08 cm
16. a) 9 m b) 8.062 m

Lösungen zu Übungen 2

17. $V = 418.997 \text{ cm}^3$; $S = 454.146 \text{ cm}^2$
18. $V = 2014.36 \text{ cm}^3$; $S = 1087.82 \text{ cm}^2$
19. $5\sqrt{21} = 22.913$
20. $s = 7a$; $h = 12a$

21. $V = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot s^3; S = s^2 \cdot (3\sqrt{3} + 9)$

22. $s = a \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3}}$

23. a) Prisma b) $V = \frac{a^3}{4}$ c) $S = a^2 \cdot \left(2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

24. $V = s^3 \cdot \sin \alpha$

25. a) wird kleiner b) -7.950%

26. a) $V = \frac{3a^3}{2}(1 + \sqrt{2}); S = a^2(9 + 4\sqrt{2})$ b) $V = b^3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}; S = b^2(6 + 3\sqrt{3})$

27. 1344.499 cm³

28. a) Skizze b) 25.526 cm

29. a) 193.297 m² b) 95.726 m² c) 424.515 m³

Lösungen zu Übungen 3

30. $V = \pi \cdot r^3$

31. 2.101 m²

32. $r = a \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

33. + 50%

34. - 36.31%

35. $V = 1028.47 \text{ cm}^3; S = 580.113 \text{ cm}^2$

36. $V = \frac{1}{4}a^3(4\sqrt{3} - \pi); S = a^2(6 + 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{2})$

37. 6.714 cm

38. 2237.646 cm²

39. 4.33 cm

40. $d_a = 5.382 \text{ m}; d_i = 2.642 \text{ m}$

41. a) $V = 3621.903; S = 1972.699$ b) $V = r^3(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}); S = r^2(6 + 6\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})$

c) $V = 27c^3(100\pi - 49\sqrt{3}); S = 90c^2(22\pi - 7\sqrt{3})$ d) $V = d^3(1 + \frac{3\pi}{2}); S = 6d^2(1 + \pi)$

3 Spitze Körper

Lösungen zu Übungen 1

1. a) 19.900 cm

b) 455.368 cm²

c) 599.368 cm²

d) 864 cm³

2. a) $V = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6}; S = a^2(1 + \sqrt{3})$

b) $V = 15084.945 \text{ cm}^3; S = 4371.281 \text{ cm}^2$

c) $V = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = 7542.472 \text{ cm}^3; S = a^2 \sqrt{3} = 2771.281 \text{ cm}^2$

3. a) 15.995 cm

b) 16.818 cm

c) 218.759 cm²

d) 253.833 cm²

4. a) 3.488 dm

b) 1.699 dm

5. a) 36.45 cm^3
c) 50.194°
6. a) 10.825 cm
b) 671.813 cm^2
7. $s = 13.014 \text{ cm}; h = 10.626 \text{ cm}$
8. 126.996 cm^3 bzw. 141.478 cm^3
9. a) $V = \frac{a^3}{6}$
c) $k_{\text{rot}} = a(4 + 2\sqrt{3})$
b) $S = a^2(1 + \sqrt{2})$
10. a) 2 Kanten à 5 cm , 4 Kanten à 6.5 cm
c) $V = 0$ (flach)
b) 22.726 cm^3
11. $S = a^2(1 + \sqrt{2})$
12. $V = \frac{a^3}{2}$
13. a) Skizze
c) 7.970 cm
b) 32.861 cm
14. $310'332.668 \text{ cm}^3$
15. 14.409 m^2
16. $V = a^3\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right); S = a^2(7 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2})$
17. a) $V = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}; S = 2a^2\sqrt{3}$
b) 62.427 cm^3
18. $V = a^3 \cdot \sqrt{2}; S = 6a^2\sqrt{3}$

Lösungen zu Übungen 2

19. 27.713 cm
20. $r = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}$
21. a) 26.362 m^2
c) 8.847 m^3
b) 3.403 m
22. $S = 129.308 \text{ cm}^2; V = 68.423 \text{ cm}^3$
23. a) 26.25 mm
b) 4.274 mm
24. 1.801 cm
25. $h = 3.048 \text{ cm}; d = 2.778 \text{ cm}$
26. $m = 41.541 \text{ cm}; \varphi = 57.928^\circ; b = 42 \text{ cm}$
27. a) $h = 24 \text{ cm}; d = 22 \text{ cm}; m = 26.401 \text{ cm}$
b) 129.361 kg
28. 405 cm^3

4 Stumpfe Körper

Lösungen zu Übungen 1

- | | |
|--|--|
| 1. a) $V = 928.649$; $S = 604.903$ | b) $V = b^3 \cdot \frac{3 + \sqrt{2}}{12} = 0.368b^3$; $S = 4.923b^2$ |
| 2. $V = 8721 \text{ cm}^3$; $S = 2711.4 \text{ cm}^2$ | |
| 3. a) 381.917 cm^3 | b) 224.820 cm^2 |
| c) 357.332 cm^2 | d) 15 cm |
| 4. 214.140 | |
| 5. $2.8 \text{ cm} \times 2.8 \text{ cm}$ | |
| 6. a) $x = 3.713 \text{ cm}$; $A = 90.714 \text{ cm}^2$ | b) $x = 6.661 \text{ cm}$; $A = 57.146 \text{ cm}^2$ |
| 7. $202,667 a^3$ | |
| 8. 16.452 m | |
| 9. $V = \frac{73}{81} a^3 = 0.901a^3$; $S = a^2 \cdot \frac{32+10\sqrt{2}}{9} = 5.127a^2$ | |
| 10. a) 5 cm | b) 6.934 cm |
| c) 6.667 cm | |
| 11. 0.824 g/cm^3 | |
| 12. a) 4 cm | b) 94.049 cm^2 |

Lösungen zu Übungen 2

- | | |
|---|------------------------------|
| 13. a) $428'947.82 \text{ cm}^3$ | b) $33'421.119 \text{ cm}^2$ |
| c) 126.839° | |
| 14. 1883.86 cm^3 | |
| 15. 2261.209 cm^2 | |
| 16. $V = 0.329 a^3$; $S = 6.193 \text{ cm}^2$ | |
| 17. a) 0.874 g/cm^3 | b) 0.125 g/cm^3 |
| 18. a) 17.100 cm | b) 2.593 cm |
| 19. $h = 9.977 \text{ cm}$; $V = 270 \text{ ml}$ | |
| 20. 108° | |
| 21. 396.678 g bzw. 297.508 g | |

5 Kugel und Kugelteile

Lösungen zu Übungen 1

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1. 1000 | |
| 2. a) $5.099 \cdot 10^8 \text{ km}^2$ | b) $6.020 \cdot 10^{21} \text{ t}$ |
| 3. 84386 Stück | |
| 4. $V_1 = 78.440 \text{ cm}^3$; $V_2 = 420.389 \text{ cm}^3$ | |

IV VEKTORGEOMETRIE

1 Vektorbegriff und Vektoroperationen

Lösungen zu Übungen 1

1. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$
 b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$
3. a) $c = 15.297$; $\varphi = 78.690^\circ$ b) $c = 11.250$; $\varphi = 23,122^\circ$ c) $c = 2.702$; $\varphi = 21.870^\circ$
4. 14.500

Lösungen zu Übungen 2

5. a) $\vec{a} = 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ b) $\vec{a} = \frac{16}{3}(\vec{b} - 2\vec{c})$ c) $\vec{a} = -\frac{1}{8}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c}$
6. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}$; $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{DG} = \vec{a} - \frac{4}{7}\vec{b}$; $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}$; $\overrightarrow{GE} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{14}\vec{b}$
7. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{CA} = -\vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{CM}_d = -\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{M}_b\vec{A} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{M}_b\vec{M}_d = -\frac{3}{4}\vec{a}$
8. $\overrightarrow{BC} = -\vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{BD} = -\vec{b} + \vec{d}$; $\overrightarrow{CD} = -\vec{c} + \vec{d}$
9. $\overrightarrow{AE} = \vec{c} + \vec{h}$; $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{h}$; $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{h}$; $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c} - \vec{h}$
10. $\overrightarrow{CE} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{AS} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$; $\overrightarrow{HS} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$; $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{MS} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$
11. a) $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{10}\vec{b} - \frac{9}{10}\vec{c}$ b) $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AE}$ c) $\overrightarrow{BF} = \frac{9}{10}\overrightarrow{BD}$
12. Skizze
13. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$
14. $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{m} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
15. $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$
16. $\overrightarrow{BS} = 2 \cdot \overrightarrow{SM}_b$

2 Vektoren in Komponentenform

Lösungen zu Übungen 1

1. $A(2;2)$; $B(-1;1)$; $C(-2;-3)$
2. $A(3;2;0)$; $B(0;2;-1)$; $C(2;0;1)$
3. Skizze
4. Skizze
5. a) $E(0;2;1)$; $F(4;0;1)$; $G(4;2;0)$; $H(4;2;1)$
 b) $(2;0;0)$; $(2;2;0)$; $(2;0;1)$; $(2;2;1)$; $(0;1;0)$; $(4;1;0)$; $(0;1;1)$; $(4;1;1)$; $(0;0;0.5)$; $(4;0;0.5)$; $(0;2;0.5)$; $(4;2;0.5)$
 c) $(2;1;0)$; $(2;1;1)$; $(2;0;0.5)$; $(2;2;0.5)$; $(0;1;0.5)$; $(4;1;0.5)$
 d) $(2;1;0.5)$

Lösungen zu Übungen 2

6. Skizze

7. $A'(1;9); B'(0;0); C'(-3.5;-16)$

8. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{33}{10} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$

9. $A'(-3;-1); B'(2;0); C'(-2.5;6)$

10. a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösungen zu Übungen 3

11. Skizze

12. $A'(1;-4;6)$

13. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1.9 \\ \frac{11}{15} \end{pmatrix}$

14. a) $A'(3;-4;-2)$ b) $A'(-3;4;2)$ c) $A'(-3;-4;2)$ d) $A'(-3;-4;2)$ 15. a) $x=6; y=\frac{3}{2}$ b) $x=5; y=-\frac{2}{3}; z=-\frac{3}{2}$ c) $x=-3; y=2; z=2$ **Lösungen zu Übungen 4**

16. a) $\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 13 \\ -12 \end{pmatrix}$

f) $d_2 = -18$

17. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $d_1 = -6; d_3 = -1$

18. a) $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

19. a) $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0.5 \\ -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$

20. $y = 15.5$

21. $b_2 = 3; b_3 = -2; c_1 = -2; c_2 = -6; c_3 = 4 \rightarrow b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösungen zu Übungen 5

22. a) unabhängig

b) abhängig

c) unabhängig

d) abhängig

e) unabhängig

f) $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{CD} \rightarrow$ abh.

23. a) ja, sind Basis

b) nein, keine Basis

24. a) ja, sind Basis

b) nein (\vec{a}/\vec{b} kollinear)

c) ja, sind Basis

d) nein (linear abh.)

25. a) $x \neq -6$

b) $y \neq 6$

26. a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 12.5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = 12.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \\ 4 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

27. a) $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b}$

b) $\vec{d} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$

28. a) $x = -0,125; y = 1,375$

b) $x = \frac{1}{2}; y = 3; z = -2$

29. a) mehre Lösungen, z.B.: $\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right); \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

b) z.B.: $\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

30. a) $\vec{a} = x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c} + z \cdot \vec{d}$ hat keine Lösung

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 Streckenlängen und Teilpunkte

Lösungen zu Übungen 1

1. a) $a = 13$

b) $b = 5$

c) $c = 17$

d) $d = 9$

2. a) $\overline{OA} = 5; \overline{OB} = 10; \overline{OC} = \sqrt{29} = 5.385$

b) $\overline{OA} = 9; \overline{OB} = 9; \overline{OC} = \sqrt{26} = 5.099$

3. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

4. a) 32

b) 33.455

c) 20

d) 31.125

5. $z = \pm 36$

6. $y_1 = 6; y_2 = -12$

7. a) $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}' = \begin{pmatrix} 6.527 \\ -2.720 \\ 7.071 \end{pmatrix}; \vec{c}' = \begin{pmatrix} -5.774 \\ 5.774 \\ -5.774 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}' = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}' = \begin{pmatrix} -6.527 \\ 2.720 \\ -7.071 \end{pmatrix}; \vec{c}' = \begin{pmatrix} 5.774 \\ -5.774 \\ 5.774 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}' = \begin{pmatrix} 0.653 \\ -0.272 \\ 0.707 \end{pmatrix}; \vec{c}' = \begin{pmatrix} -0.577 \\ 0.577 \\ -0.577 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}' = \begin{pmatrix} -0.653 \\ 0.272 \\ -0.707 \end{pmatrix}; \vec{c}' = \begin{pmatrix} 0.577 \\ -0.577 \\ 0.577 \end{pmatrix}$

8. a) $\vec{e}_a = \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{e}_b = \begin{pmatrix} -0.514 \\ 0.857 \end{pmatrix}$

c) $\vec{e}_c = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

d) $\vec{e}_d = \begin{pmatrix} 0.845 \\ -0.169 \\ 0.507 \end{pmatrix}$

9. $S_1(18;18); S_2(2;-12); S_3(-14;0)$

10. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

11. $C(0;1;9); D(-2;-6;5)$

12. a) $P_1(0;2); P_2(2;0)$

b) $P_1(-2.214;0;0); P_2(0;-5.167;0); P_3(0;0;15.5)$

13. $P_1(4;0); P_2(17.33;0)$

14. $P_1(0;3.870;0); P_2(0;6.880;0)$

15. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$

Lösungen zu Übungen 2

16. $\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

17. a) $T(3,857;0,143)$

b) $T(9.5;-1)$

c) $T(2;3;-2)$

d) $T(6;-3;0)$

18. a) 3:2

b) 2:1

19. a) $S(-1.333;4)$

b) $S(-1;4,333;2)$

20. $\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$

21. $C(13;16)$

22. a) $S(1;2)$

b) $S(1;-1;3)$

23. $M(2;3)$; $r=5$
 24. $M(3;-1;2)$; $r=9$
 25. a) 4:1 b) 3:2

4 Skalarprodukt

Lösungen zu Übungen 1

1. a) 5 b) $-12\sqrt{2} = -16.971$
 c) -1 d) 7
 e) 2 f) -13
 2. a) 120° b) 45°
 c) 139.764° d) 90°
 e) 75.821° f) 91.328°
 3. a) 180° b) 60°
 c) 19.188° d) 90°
 e) nicht lösbar in $G = \mathbb{R}$ f) $\varphi_1 = 120^\circ$; $\varphi_2 = 60^\circ$
 4. a) $\alpha = 44.215^\circ$; $\beta = 52.125^\circ$; $\gamma = 83.660^\circ$ b) $\alpha = 100.091^\circ$; $\beta = 38.754^\circ$; $\gamma = 41.155^\circ$
 5. $\alpha = 84.094^\circ$; $\beta = 90^\circ$; $\gamma = 130.601^\circ$; $\delta = 55.305^\circ$
 6. 72.508° bzw. 107.492°
 7. a) $n = -1$ b) $n_1 = 1$; $n_2 = -1$
 c) $n_1 = 2$; $n_2 = -2$
 8. $\angle AMB = 97.407^\circ$; $\angle FMG = 44.129^\circ$
 9. a) 60° b) 90° c) 60°

Lösungen zu Übungen 2

10. a) -6 b) 8
 c) 18 d) -60
 11. a) skalar; 1 b) skalar; 0
 c) vektoriell; $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) skalar; 24
 e) undefiniert f) skalar; 8
 12. a) $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = a^2 - b^2$ b) $6\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2$
 c) $4n\vec{a} + n\vec{b}$ d) $9\vec{a}^2 - 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2$
 13. $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \neq (a_1a_1 + a_2a_2)(b_1b_1 + b_2b_2)$

Lösungen zu Übungen 3

14. a) $\vec{w}_\alpha \cdot \vec{w}_\beta = 0$

c) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}; \vec{c} \cdot \vec{b} = c \cdot b \cdot \cos \alpha$

15. a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

c) zusätzlich $\vec{c} = \vec{p} + \vec{q}$

16. $\vec{AB} = \vec{DC}; \vec{BC} = \vec{AD}; \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$

17. a) $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 3.3 \\ -4.94 \\ 0.82 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3.3 \\ 4.94 \\ -0.82 \end{pmatrix}$

19. a) -5

b) 2

20. $x = -6; z = 2$

21. $(y_1 = -1.5; z_1 = 1.5); U_1 = 14; A_1 = 12.25; (y_2 = 0.75; z_2 = 0.75); U_2 = 13; A_2 = 10.563$

22. $P_1(0;0;4); P_2(0;0;-2)$

23. a) -0.5

b) 2

24. $a^2 + c^2 = b^2$

Lösungen zu Übungen 4

25. a) $\varphi_x = 59.036^\circ; \varphi_y = 30.964^\circ$

b) $\varphi_x = 70.093^\circ; \varphi_y = 20.547^\circ; \varphi_z = 85.117^\circ$

c) $\varphi_x = 71.565^\circ; \varphi_y = 90^\circ; \varphi_z = 18.435^\circ$

d) $\varphi_x = 69.590^\circ; \varphi_y = 35.538^\circ; \varphi_z = 62.290^\circ$

26. $P_1(9.246;0;0); P_2(-7.246;0;0)$

27. $\varphi_z = 65.427^\circ$

28. $a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}; a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

29. $C_1(1;-7); C_2(5;1)$

Lösungen zu Übungen 5

30. a) $a_b = \sqrt{5} = 2.236; \vec{a}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $a_b = -\sqrt{38} = -6.164; \vec{a}_b = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

31. a) 5; $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) -3.790; $\begin{pmatrix} -2.874 \\ -2.011 \\ 1.437 \end{pmatrix}$

32. a) $2\sqrt{5} = 4.472$ b) 6.403
 33. $H_c(2;0); F = 45$
 34. $C_1(-1;7;-10); C_2(-9;-1;-6); F_1 = F_2 = 10.062$
 35. 14.731
 36. $\overrightarrow{AD_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$
 37. 81.876

Lösungen zu Übungen 6

38. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.30 \\ 1.70 \\ 1.40 \end{pmatrix} = 9.10 \text{ Fr.}$

39. a) 1350 Zeiteinheiten

b) $K = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \left[0.05 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.25 \\ 0.20 \end{pmatrix}$

40. 168.60 Fr.
 41. 68.885°
 42. a) 123 J
 43. 611.068 N

- b) 29.291°