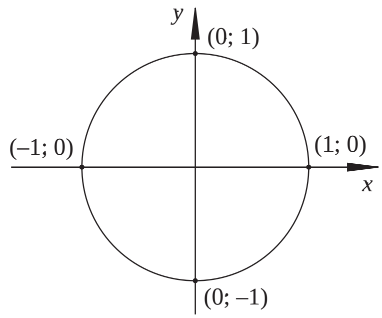
7 Berechnungen am schiefwinkligen Dreieck

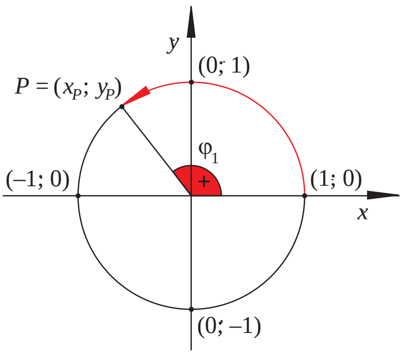
7.1 Trigonometrische Funktionen und Einheitskreis

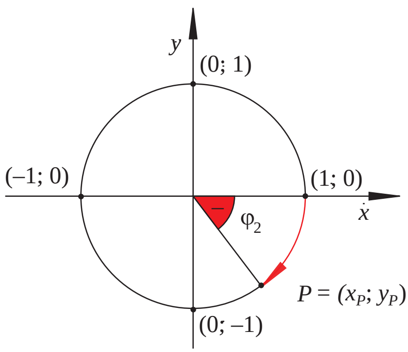
7.1.1 Winkel und Einheitskreis



Bisher haben wir die trigonometrischen Funktionen als Seitenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck interpretiert. So waren die Winkelfunktionen nur für positive, spitze Winkel definiert. Nun wählen wir einen allgemeineren Zugang und definieren die trigonometrischen Funktionen mithilfe des Einheitskreises für **beliebige Winkel**.
Wir zeichnen im Ursprung des rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems einen Kreis mit Radius $r = 1$, den **Einheitskreis**, ein. Der Kreismittelpunkt hat die Koordinaten $(0; 0)$ und die Kreislinie schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$ und $(0; -1)$.

Wir lassen nun einen Punkt P von der Startposition $(1; 0)$ aus auf der Kreislinie rotieren. Zwischen der x-Achse (erster Schenkel) und dem Strahl OP (zweiter Schenkel) entsteht so zu jeder Position von P auf dem Kreis ein **Zentriwinkel** φ. Bewegt sich der Punkt im **Gegenuhrzeigersinn**, entstehen **positive** Winkel. Erfolgt die Bewegung im **Uhrzeigersinn**, ergeben sich **negative Winkel**. Da beliebig viele Umdrehungen möglich sind, entstehen **beliebig grosse** Winkel.





Kommentar

- Der rote Kreisbogen entspricht dem Winkel φ im Bogenmass.

7.1.2 Sinus und Cosinus

Definition **Sinus und Cosinus am Einheitskreis**

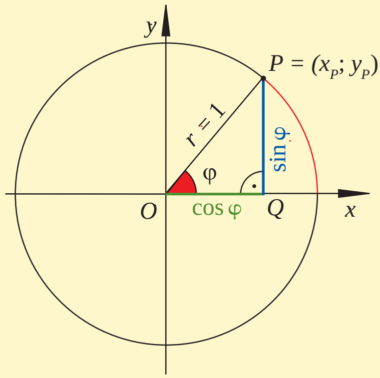
Am Einheitskreis gilt für einen beliebigen Punkt P auf der Kreislinie und den zugehörigen Zentriwinkel φ:

Die *y-Koordinate* des Punktes P ist der *Sinuswert* von φ:

$$y_P = \sin\varphi \tag{1}$$

Die *x-Koordinate* des Punktes P ist der *Cosinuswert* von φ:

$$x_P = \cos\varphi \tag{2}$$



Kommentar

- Unsere ursprünglichen Definitionen aus Kapitel 6 gelten auch am Einheitskreis. So entspricht der Radius $r = 1$ des Einheitskreises am rechtwinkligen Dreieck $\triangle OQP$ der Hypotenuse. Daraus folgt:

$$\sin\varphi = \frac{GK}{H} = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ},\ \overline{PQ} \text{ entspricht gerade der } y\text{-Koordinate des Punktes } P \tag{3}$$

$$\cos\varphi = \frac{AK}{H} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ},\ \overline{OQ} \text{ entspricht gerade der } x\text{-Koordinate des Punktes } P \tag{4}$$

7.1.3 Tangens

Wir zeichnen durch den Punkt $(1;\ 0)$ eine **Tangente** an den Einheitskreis. Der zweite Schenkel OP des Winkels φ schneidet die Tangente im Punkt S.

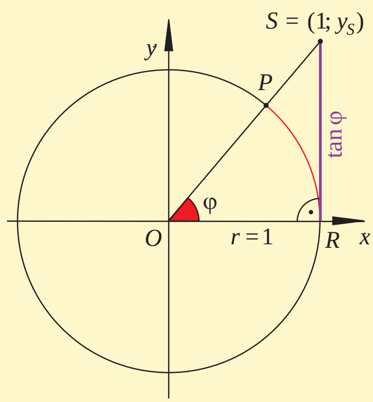
Definition **Tangens am Einheitskreis**

Am Einheitskreis gilt für einen beliebigen Punkt P auf der Kreislinie und den zugehörigen Zentriwinkel φ:

Die *y-Koordinate* des Punktes S ist der *Tangens* von φ:

$$y_S = \tan\varphi \tag{5}$$

Dies entspricht der Länge des *Tangentenabschnitts* $\overline{RS}$ auf der rechten Tangente.



Kommentar

- Unsere ursprüngliche Definition aus Kapitel 6 gilt auch am Einheitskreis. So entspricht der Radius $r = 1$ des Einheitskreises am rechtwinkligen Dreieck $\triangle ORS$ der Ankathete. Daraus folgt:

$$\tan\varphi = \frac{GK}{AK} = \frac{\overline{RS}}{1} = \overline{RS} \tag{6}$$

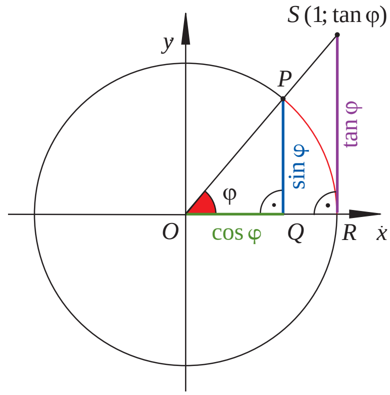
7.1.4 Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen

Aus der **Ähnlichkeit** der beiden Dreiecke $\triangle OQP$ und $\triangle ORS$ folgt, dass entsprechende Seitenverhältnisse gleich gross sind:

$$\frac{\tan\varphi}{1} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \qquad (7)$$

Wenden wir den **Satz des Pythagoras** am rechtwinkligen Dreieck $\triangle OQP$ an, so erhalten wir:

$$\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2$$
$$\Rightarrow \quad \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \qquad (8)$$



Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen

Ähnlichkeit am Einheitskreis:

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \qquad (9)$$

Pythagoras am Einheitskreis:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \qquad (10)$$

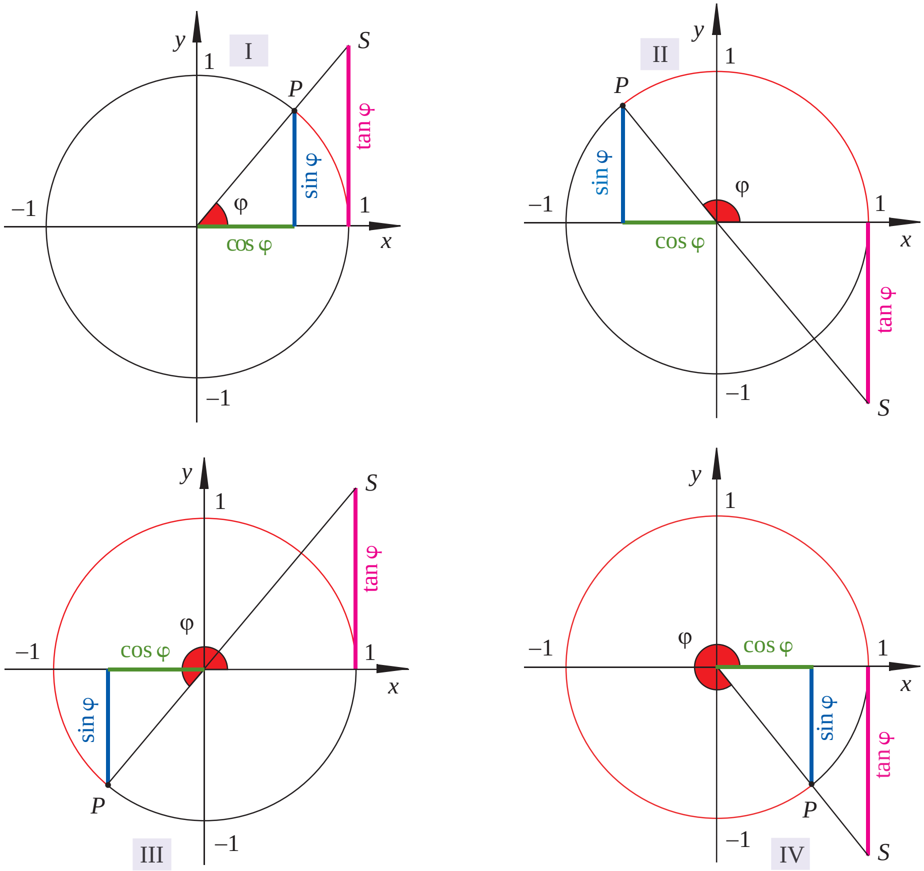
Mithilfe der Gleichungen (9) und (10) finden wir weitere Beziehungen, sodass sich jede der drei Winkelfunktionen in die beiden anderen umrechnen lässt:

gegeben / gesucht	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
$\sin\varphi$	$\sin\varphi$	$\sqrt{1-\cos^2\varphi}$	$\dfrac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$
$\cos\varphi$	$\sqrt{1-\sin^2\varphi}$	$\cos\varphi$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$
$\tan\varphi$	$\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$	$\tan\varphi$

7.1.5 Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen

Wenn wir den Punkt P auf der Kreislinie rotieren lassen, können wir herausfinden, welche Vorzeichen die Funktionswerte in den **Quadranten** I bis IV, das heisst für Winkel zwischen 0° und 360°, haben.

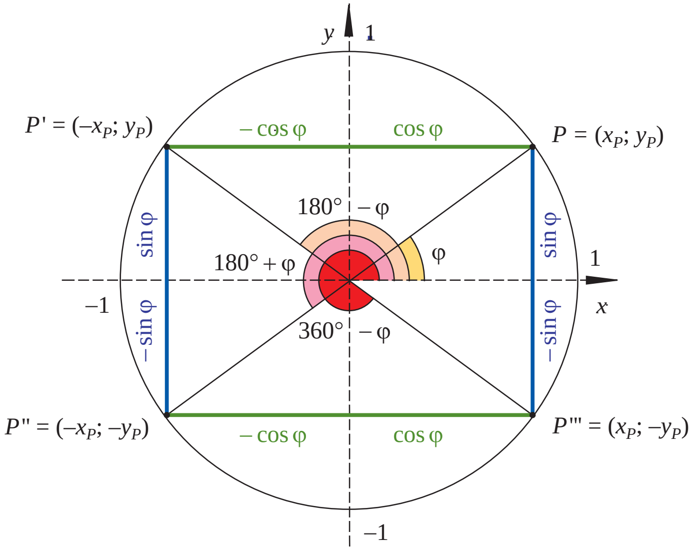


Aus den Darstellungen am Einheitskreis folgt für die **Vorzeichen der Funktionswerte der Winkelfunktionen**:

Quadrant	Intervall	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
I	$0° < \varphi < 90°$	+	+	+
II	$90° < \varphi < 180°$	+	–	–
III	$180° < \varphi < 270°$	–	–	+
IV	$270° < \varphi < 360°$	–	+	–

Symmetrieeigenschaften am Einheitskreis

Eine fortlaufende **Spiegelung** des Punktes P ergibt die Punkte P', P'' und P'''. Wegen der **Symmetrieeigenschaften** sind alle vertikalen und horizontalen Strecken gleich lang, das heisst die Sinus- und Cosinuswerte unterscheiden sich also nur durch das Vorzeichen.



Symmetrieeigenschaften		
Sinus	Cosinus	Tangens
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$
$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$	$\tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$
$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$	$\tan(360° - \alpha) = -\tan\alpha$

Definitions- und Wertemenge der Winkelfunktionen

Sinus und Cosinus

$\mathbb{D} = \mathbb{R}, \ \mathbb{W} = [-1; 1]$

Tangens

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} \pm k\pi\right\}, \ \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Kommentar

- Der Tangens weist Definitionslücken auf: Die **Tangenswerte** werden immer **grösser**, wenn sich die Argumente φ immer mehr dem nicht definierten Wert 90° annähern. Sie streben gegen $+\infty$, da der zweite Schenkel OP des Winkels φ nun parallel zur senkrechten, rechten Tangente verlaufen würde. Eine ähnliche Situation stellt sich auch ein, wenn φ gegen 270° strebt: Die Tangenswerte werden immer **kleiner**, streben gegen $-\infty$ und für $\varphi = 270°$ ist der Tangens wiederum **nicht definiert**.

■ **Beispiele**

(1) Bestimmen Sie $\tan\alpha$, wenn $\sin\alpha = 0.5$ ist, ohne den Arcuscosinus zu verwenden.

Lösung:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{0.5}{\sqrt{1-0.5^2}} \approx 0.5774$$

(2) Bestimmen Sie für $0° \leq \alpha \leq 360°$ alle Winkel im Gradmass, für die gilt: $|\cos\alpha| = 0.8$

Lösung:

Wegen der Betragstriche sind Winkel gesucht, zu denen ein Wert von $\pm\, 0.8$ gehört.
Zuerst bestimmen wir den Winkel α_1 mit dem Taschenrechner:

$$\alpha_1 = \arccos 0.8 \approx 36.87°$$

Die anderen drei Winkel bestimmen wir aus den Symmetrieeigenschaften am Einheitskreis. Beim Cosinus sind vier Strecken aus Symmetriegründen gleich lang:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 180° - \alpha_1 \approx 180° - 36.87° \approx 143.13°$$

$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 180° + \alpha_1 \approx 180° + 36.87° \approx 216.87°$$

$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha_4 = 360° - \alpha_1 \approx 360° - 36.87° \approx 323.13°$$

(3) Überlegen Sie mithilfe des Einheitskreises, ob folgende Ungleichung gilt: $\tan 100° > \sin 100°$.

Lösung:

$\tan 100°$ liegt im zweiten Quadranten und deshalb gilt: $\tan 100° < 0$ (negativ).
$\sin 100°$ liegt im zweiten Quadranten und deshalb gilt: $\sin 100° > 0$ (positiv).
Die Ungleichung stimmt nicht, es gilt: $\tan 100° < \sin 100°$.

◆ **Übungen 16 ⟶ S. 118**

7.2 Sinussatz

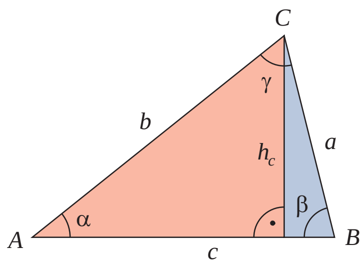
In Kapitel 6 haben wir die trigonometrischen Funktionen nur für Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck verwendet. Durch die Definitionen am Einheitskreis sind wir nun in der Lage, die Winkelfunktionen auf alle **Dreiecke**, die wir mit **Zirkel** und **Lineal konstruieren** können, anzuwenden.
Wir teilen ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige Teildreiecke und suchen nach einer Beziehung zwischen den Seiten a und b sowie den Winkeln α und β:

Im **roten** Teildreieck gilt:

$$\sin\alpha = \frac{GK}{H} = \frac{h_c}{b} \quad \Rightarrow \quad h_c = b\sin\alpha \qquad (11)$$

Im **blauen** Teildreieck gilt:

$$\sin\beta = \frac{GK}{H} = \frac{h_c}{a} \quad \Rightarrow \quad h_c = a\sin\beta \qquad (12)$$



Durch Gleichsetzen von (11) und (12) finden wir die gesuchte Beziehung zwischen den Seiten a und b sowie den Winkeln α und β.

$$h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \tag{13}$$

Analog kann man mit den beiden anderen Höhen des Dreiecks verfahren und erhält so:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \text{und} \quad \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{14}$$

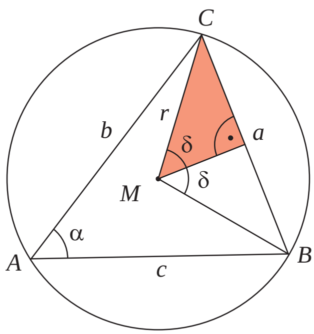
Die Gleichungen (13) und (14) werden in der Regel in einem Ausdruck zusammengefasst.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \text{const.} \tag{15}$$

Der Quotient aus der Länge einer Seite und dem Sinus des **gegenüberliegenden** Winkels ist in einem **beliebigen** Dreieck konstant.

Wir untersuchen nun die geometrische Bedeutung dieser Konstanten:

Zwei Katheten des Teildreiecks $\triangle MBC$ sind gleich dem Kreisradius r. Das Dreieck ist also gleichschenklig. Deshalb entspricht der Winkel δ im roten Dreieck dem halben Zentriwinkel $\angle CMB$.



Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt:

$$\alpha = \frac{1}{2}\angle CMB = \delta \tag{16}$$

Im roten rechtwinkligen Teildreieck gilt:

$$\sin\alpha = \sin\delta = \frac{GK}{H} = \frac{0.5\,a}{r}$$

$$\Rightarrow \quad a = 2r\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin\alpha} = 2r \tag{17}$$

Die Konstante von Gleichung (15) entspricht somit der Länge des **Durchmessers** $2r$ des **Umkreises** des Dreiecks $\triangle ABC$.

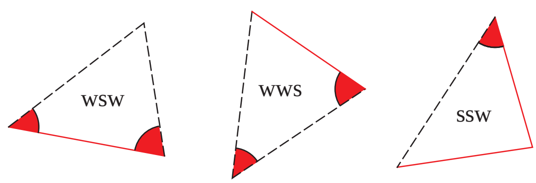
Sinussatz

In jedem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$ ist das Verhältnis der Länge einer Seite zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels gleich dem Durchmesser des Umkreises:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \tag{18}$$

Kommentar

- Den Sinussatz können wir verwenden, wenn wir zwei Winkel und eine Seite (wsw und wws) kennen oder wenn zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel (ssw) gegeben sind.



- Liegt bei ssw der Winkel der grösseren Seite gegenüber (Ssw), dann gibt es ein mögliches Dreieck. Liegt der Winkel jedoch der kleineren Seite gegenüber (sSw), dann gibt es wie beim Konstruieren erkennbar **zwei Lösungen**. Der Rechner liefert nur die spitzwinklige Lösung α_1, die stumpfwinklige α_2 kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$\alpha_2 = 180° - \alpha_1 \tag{19}$$

Die Herleitung erfolgt aus der **Konstruktion** oder mithilfe des **Einheitskreises**.

Beispiele

(1) Gegeben: Dreieck $\triangle ABC$ mit $c = 14\,\mathrm{m}$, $\alpha = 57.1°$ und $\beta = 44.4°$
Gesucht: Seitenlängen von a und b

Lösung:
Bestimmen von γ mithilfe der Innenwinkelsumme am Dreieck:

$$\gamma = 180° - 57.1° - 44.4° = 78.5°$$

wsw $\Rightarrow$ Verwendung des Sinussatzes (eine Lösung):

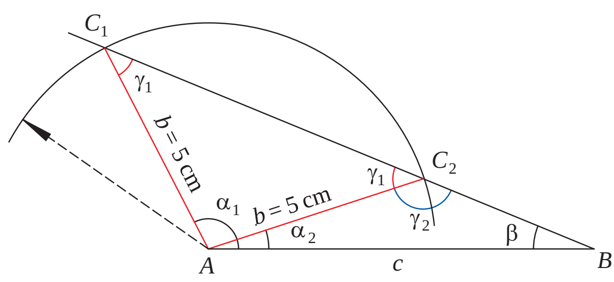
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad\Rightarrow\quad a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad\Rightarrow\quad a = \frac{14\cdot\sin 57.1°}{\sin 78.5°} \approx 11.99\,\mathrm{m} \approx 12\,\mathrm{m}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad\Rightarrow\quad b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} \quad\Rightarrow\quad b = \frac{14\cdot\sin 44.4°}{\sin 78.5°} \approx 9.996\,\mathrm{m} \approx 10\,\mathrm{m}$$

(2) Gegeben: Dreieck $\triangle ABC$ mit $b = 5\,\mathrm{cm}$, $c = 8\,\mathrm{cm}$ und $\beta = 20°$
Gesucht: Winkel γ und α

Lösung:
sSw $\Rightarrow$ Verwendung des Sinussatzes. Der gegebene Winkel β liegt der kleineren Seite gegenüber, also sind zwei Lösungen zu erwarten, wie die Dreieckskonstruktion zeigt.

1. $c = 8\,\mathrm{cm}$ und $\beta = 20°$ abtragen.
2. $b = 5\,\mathrm{cm}$ mit Zirkel von A aus abtragen.



3. Es sind zwei Schnittpunkte möglich, deshalb sind die Dreiecke $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$ zu konstruieren. Die spitzwinklige Lösung γ_1 berechnen wir mit dem Sinussatz und mit dem Taschenrechner:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma_1} \quad\Rightarrow\quad b\sin\gamma_1 = c\sin\beta \quad\Rightarrow\quad \sin\gamma_1 = \frac{c\sin\beta}{b}$$

$$\Rightarrow\quad \gamma_1 = \arcsin\frac{c\sin\beta}{b} \quad\Rightarrow\quad \gamma_1 = \arcsin\frac{8\cdot\sin 20°}{5} \approx 33.2°$$

Die zweite, stumpfwinklige Lösung γ_2, finden wir mit Gleichung (19) oder folgender Überlegung: das Dreieck $\triangle AC_1C_2$ ist gleichschenklig. Deshalb ist der Winkel $\angle AC_1C_2$ auch gleich γ_1. Der Winkel γ_2 ist Nebenwinkel von γ_1, also gilt:

$$\gamma_2 = 180° - \gamma_1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 \approx 180° - 33.2° \approx 146.8°$$

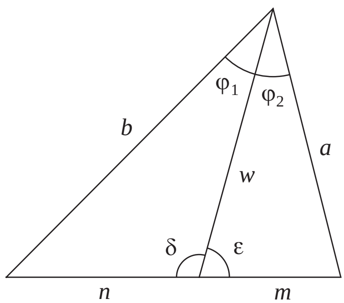
Die restlichen Winkel finden wir mit der Innenwinkelsumme:

$$\alpha_1 \approx 180° - 20° - 33.2° \approx 126.8°$$

$$\alpha_2 \approx 180° - 20° - 146.8° \approx 13.2°$$

(3) Zeigen Sie, dass in jedem beliebigen Dreieck die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.

Lösung:



Zu zeigen: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

Winkel δ ist Nebenwinkel von ε:

$$\varepsilon = 180° - \delta$$

Aus den Symmetrieeigenschaften folgt:

$$\sin\varepsilon = \sin(180° - \delta) = \sin\delta$$

Mit dem Sinussatz folgt weiter:

$$\frac{n}{\sin\varphi_1} = \frac{b}{\sin\delta}$$

$$\frac{m}{\sin\varphi_2} = \frac{a}{\sin\varepsilon} = \frac{a}{\sin\delta}$$

Wir lösen die Gleichungen nach $\sin\delta$ auf und setzen gleich:

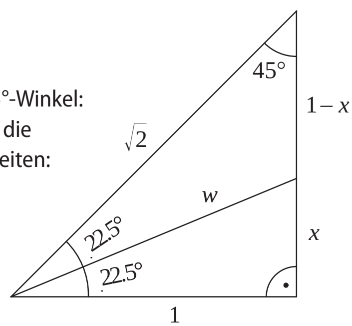
$$\sin\delta = \frac{b}{n}\sin\varphi_1 = \frac{a}{m}\sin\varphi_2$$

Da w nach Voraussetzung die Winkelhalbierende ist, gilt $\varphi_1 = \varphi_2$ und damit auch $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$. Wir ersetzen in der Gleichung oben $\sin\varphi_2$ durch $\sin\varphi_1$ und teilen beide Seiten durch $\sin\varphi_1$:

$$\frac{b}{n}\sin\varphi_1 = \frac{a}{m}\sin\varphi_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{n} = \frac{a}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

(4) Berechnen Sie den Wert von $\tan 22.5°$ exakt.

Lösung:



Wir betrachten ein 45°-45°-Dreieck und halbieren einen 45°-Winkel: Wie in Beispiel (3) bewiesen, teilt die Winkelhalbierende w die gegenüber liegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{1-x} \quad \Rightarrow \quad 1 - x = x\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad x\sqrt{2} + x = 1 \quad \Rightarrow \quad x(\sqrt{2}+1) = 1$$

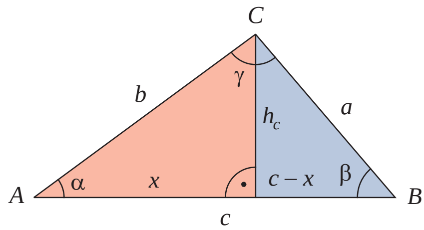
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\tan 22.5° = \frac{x}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \quad \Rightarrow \quad \tan 22.5° = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$$

◆ Übungen 17 → S. 119

7.3 Cosinussatz

Mit dem Sinussatz sind wir **nicht** in der Lage, **alle Seiten** und **Winkel** eines beliebigen Dreiecks zu berechnen, wenn drei Teile gegeben sind. Dies gilt insbesondere, wenn drei Seiten bekannt sind und die Grössen der Winkel gesucht werden.
Wir teilen ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige Teildreiecke und suchen nach einer Beziehung zwischen den Seiten a, b und c sowie dem Winkel α:



Im **roten** Teildreieck gilt nach Pythagoras:

$$b^2 = h_c^2 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad h_c^2 = b^2 - x^2 \qquad (20)$$

Im **blauen** Teildreieck gilt:

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad h_c^2 = a^2 - (c-x)^2 \qquad (21)$$

Wir setzen (20) und (21) gleich und lösen nach a^2 auf:

$$a^2 - (c-x)^2 = b^2 - x^2$$
$$a^2 - (c^2 - 2cx + x^2) = b^2 - x^2$$
$$a^2 - c^2 + 2cx - x^2 = b^2 - x^2$$
$$a^2 - c^2 + 2cx = b^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \qquad (22)$$

Im **roten** Teildreieck gilt weiter:

$$\cos\alpha = \frac{AK}{H} = \frac{x}{b} \quad \Rightarrow \quad x = b\cos\alpha \qquad (23)$$

Wir setzen Gleichung (23) in (22) und erhalten:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad (24)$$

Analog können wir mit den beiden anderen Höhen des Dreiecks verfahren und erhalten so:

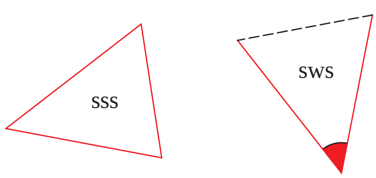
Cosinussatz

In jedem *beliebigen* Dreieck $\triangle ABC$ ist das Quadrat der Länge einer Seite aus dem gegenüberliegenden Winkel und den anliegenden Seiten berechenbar:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad (25)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \qquad (26)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \qquad (27)$$

Kommentar

- Den Cosinussatz können wir verwenden, wenn zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel (sws) oder drei Seiten gegeben sind (sss).
- Der Cosinussatz kann auch für den Fall ssw verwendet werden, die Lösung mit dem Sinussatz ist aber einfacher.



Zusammenfassung

- Wir können nun in einem beliebigen Dreieck *alle* Teile berechnen, wenn *drei* Teile gegeben sind, die den Kongruenzsätzen entsprechen.
- Für die Fälle wsw (wws) und ssw verwenden wir den *Sinussatz*, für sws und sss den *Cosinussatz*.
- Beim Berechnen von *stumpfen* Winkeln mit dem Sinussatz muss der Winkel mit Gleichung (19) berechnet werden.

■ Beispiele

(1) Gegeben: Dreieck $\triangle ABC$ mit $b = 10\,\text{m}$, $c = 14\,\text{m}$ und $\alpha = 57.1°$
Gesucht: Seitenlänge a

Lösung:
Mit dem Cosinussatz folgt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{10^2 + 14^2 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cos 57.1°} \approx 11.99\,\text{m}$$

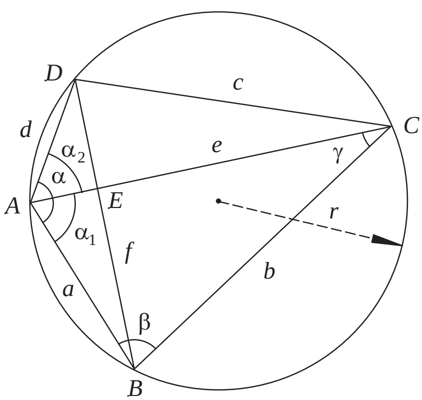
(2) Gegeben: Dreieck $\triangle ABC$ mit $a = 12\,\text{m}$, $b = 10\,\text{m}$, $c = 14\,\text{m}$
Gesucht: Winkel α

Lösung:
Mit dem Cosinussatz ergibt sich:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad 2\,b\,c\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \arccos\frac{10^2 + 14^2 + 12^2}{2 \cdot 10 \cdot 14} \approx 57.12°$$

(3) In einem Sehnenviereck sind die Seiten $a = 5.0\,\text{cm}$, $b = 3.2\,\text{cm}$, $d = 3.4\,\text{cm}$ und der Winkel $\alpha = 80°$ gegeben.
Berechnen Sie die beiden Diagonalen e und f sowie den Winkel β.



Lösung:
Cosinussatz im Dreieck $\triangle ABD$:

$$f = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha} = \sqrt{5^2 + 3.4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3.4\cos 80°} \approx 5.537\,\text{cm}$$

Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABD$ haben denselben Umkreis. Mit dem Sinussatz folgt:

$$2r = \frac{f}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{f}{2\sin\alpha} = \frac{5.537}{2\sin 80°} \approx 2.811 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{\sin\alpha_1} = 2r \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha_1 = \frac{b}{2r} \approx \frac{3.2}{2\cdot 2.811} \approx 0.5692$$

$$\alpha_1 = \arcsin 0.5692 \approx 34.69° \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \alpha - \alpha_1 \approx 80° - 34.69° \approx 45.31°$$

$$\frac{a}{\sin\gamma} = 2r \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = \frac{a}{2r} \approx \frac{5}{2\cdot 2.811} \approx 0.8893 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin 0.8893 \approx 62.79°$$

$$\beta = 180° - \alpha_1 - \gamma \approx 180° - 34.69° - 62.79° \approx 82.52°$$

Cosinussatz im Dreieck $\triangle ABC$:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta} = \sqrt{5^2 + 3.2^2 - 2\cdot 5\cdot 3.2\cos 82.52°} \approx 5.58 \text{ cm}$$

◆ Übungen 18 ⟶ S. 119

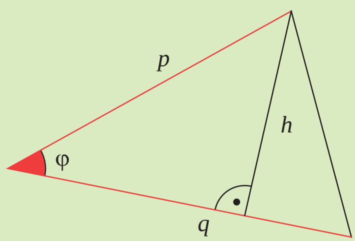
7.4 Flächensatz

Mithilfe der Trigonometrie kann der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks berechnet werden, ohne dass die Höhe bekannt ist:

Berechnung der Dreiecksfläche

Kennt man von einem Dreieck die beiden Seiten p und q sowie den dazwischen liegenden Winkel φ, so ist der *Flächeninhalt A der Dreiecksfläche* gegeben durch:

$$A = \frac{pq}{2}\sin\varphi \qquad (28)$$



Kommentar

- Gleichung (28) gilt auch für stumpfe Winkel $\varphi \in]90°; 180°]$.
- In den beiden Grenzfällen $\varphi = 0°$ und $\varphi = 180°$ ist die Dreieckfläche null.

■ Beispiele

(1) Berechnen Sie den Inhalt der Dreiecksfläche A aus $b = 320$ m, $c = 970$ m und $\alpha = 47°$.

Lösung:

Aus Gleichung (28) folgt:

$$A = \frac{bc}{2}\sin\alpha = \frac{320\cdot 970}{2}\sin 47° \approx 113\,506 \text{ m}^2$$

(2) Berechnen Sie den Inhalt der Dreiecksfläche A aus $a = 7$ cm, $b = 9$ cm und $c = 10$ cm.

Lösung:
Mit dem Cosinussatz bestimmen wir den Winkel α des Dreiecks.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9^2 + 10^2 - 7^2}{2 \cdot 9 \cdot 10} = 0.7\overline{3}$$

$$\alpha = \arccos 0.7\overline{3} \approx 42.83°$$

Mit dem Flächensatz bestimmen wir den Flächeninhalt A des Dreiecks.

$$A = \frac{bc}{2}\sin\alpha = \frac{9 \cdot 10}{2}\sin 42.83° \approx 30.59\ \text{cm}^2$$

7.5 Berechnungen am Kreis

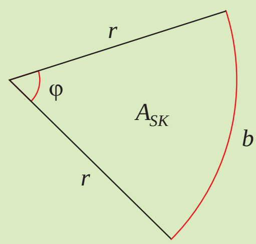
7.5.1 Kreissektor (auch Kreisausschnitt)

Die Berechnungen am Kreissektor mit Gradmass haben wir im Kapitel 4.2 kennen gelernt. Zur Berechnung der Bogenlänge oder der Sektorfläche kann aber auch das Bogenmass verwendet werden. Wir bezeichnen den Winkel im Bogenmass mit $\widehat{\varphi}$. Wir können nun die bekannten Formeln auch mit Bogenmass angeben, wenn wir die Umrechnungsformel $\widehat{\varphi} = \frac{\pi\varphi}{180°}$ verwenden und einsetzen:

Berechnungen am Kreissektor

$$b = \frac{\pi r \varphi}{180°} = r\widehat{\varphi} \qquad (29)$$

$$A_{SK} = \frac{\pi r^2 \varphi}{360°} = \frac{r^2\widehat{\varphi}}{2} = \frac{br}{2} \qquad (30)$$



7.5.2 Kreissegment (auch Kreisabschnitt)

Im Kapitel 4.2.3 konnten wir nur Segmente mit ganz bestimmten Winkeln berechnen.
Mithilfe der Trigonometrie ist es nun möglich, eine allgemeine Flächenformel für Kreissegmente mit dem Radius r und dem Zentriwinkel φ herzuleiten.

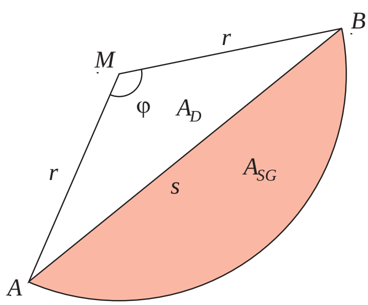
Mit der Flächenformel folgt für den Flächeninhalt A_D des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle MAB$:

$$A_D = \frac{r \cdot r}{2}\sin\varphi = \frac{1}{2}r^2\sin\varphi \qquad (31)$$

Die Segmentfläche A_{SG} kann nun berechnet werden, indem vom Inhalt der Sektorfläche mit Radius r und Zentriwinkel φ der Inhalt der Dreiecksfläche A_D subtrahiert wird.

$$A_{SG} = A_{SK} - A_D$$

$$A_{SG} = \frac{r^2\pi\varphi}{360°} - \frac{1}{2}r^2\sin\varphi = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\varphi}{180°} - \sin\varphi\right) \qquad (32)$$



Mit $\widehat{\varphi} = \frac{\pi\varphi}{180°}$ folgt für den Winkel $\widehat{\varphi}$ im Bogenmass:

$$A_{SG} = \frac{1}{2}r^2\,\widehat{\varphi} - \frac{1}{2}r^2 \sin\widehat{\varphi} = \frac{r^2}{2}(\widehat{\varphi} - \sin\widehat{\varphi}) \tag{33}$$

Wir fassen zusammen:

Segmentfläche

Der Flächeninhalt der *Segmentfläche* A_{SG} kann aus dem Radius r und dem Zentriwinkel φ berechnet werden:

$$A_{SG} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\varphi}{180°} - \sin\varphi\right) \tag{34}$$

$$A_{SG} = \frac{r^2}{2}(\widehat{\varphi} - \sin\widehat{\varphi}) \tag{35}$$

■ **Beispiel**

Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Segments aus dem Radius $r = 4.5\ \text{cm}$ und dem Zentriwinkel $\widehat{\varphi} = 1.2$.

Lösung:

$$A_{SG} = \frac{r^2}{2}(\widehat{\varphi} - \sin\widehat{\varphi}) = \frac{4.5^2}{2}(1.2 - \sin 1.2) \approx 2.713\ \text{cm}^2$$

◆ **Übungen 19 ⟶ S. 123**

Terminologie

Cosinus
Cosinussatz
Einheitskreis
Flächensatz
Gegenuhrzeigersinn
Kongruenzsätze
konstant
Kreissegment
Kreissektor
Quadrant

Sinus
Sinussatz
Spiegelung
spitzer Winkel
stumpfer Winkel
Symmetrieeigenschaften
Tangens
Tangente
Tangentenabschnitt
trigonometrische Funktionen

Uhrzeigersinn
Umkreisradius
Vorzeichen
Winkelfunktionen
Winkelhalbierende
x-Koordinate
y-Koordinate
Zentriwinkel

7.6 Übungen

Übungen 16

1. Wie gross ist

a) $\tan\alpha$, wenn $\cos\alpha = 0.5$ ist?
b) $\sin\alpha$, wenn $\tan\alpha = 6$ ist?
c) $\cos\alpha$, wenn $\tan\alpha = 3.4$ ist?
d) $\tan\alpha$, wenn $\sin\alpha = 0.6$ ist?
e) $\cos\alpha$, wenn $\sin\alpha = 0.24$ ist?
f) $\sin\alpha$, wenn $\cos\alpha = 0.32$ ist?

Bestimmen Sie die Lösung mithilfe der Umrechnungen von einer Winkelfunktion in eine andere.

2. Bestimmen Sie für $0° \leq \alpha \leq 360°$ die beiden Winkel, für die gilt:

a) $\sin\alpha = 0.35$
b) $\tan\alpha = -0.84$
c) $\cos\alpha = 0.9$
d) $\sin\alpha = -0.01$
e) $\tan\alpha = 24$
f) $\cos\alpha = -0.6$

3. Welche der folgenden Gleichungen sind wahr, welche falsch? Treffen Sie Ihre Entscheidung, ohne die einzelnen Funktionen zu berechnen. Überlegen Sie mithilfe des Einheitskreises, indem Sie die Streckenlängen am Einheitskreis einzeichnen.

a) $\sin 20° = \sin 70°$
b) $\tan 85° = \tan 5°$
c) $\cos 70° = \sin 20°$
d) $\sin 100° = \cos 10°$

4. Welche der folgenden Ungleichungen sind wahr, welche falsch? Treffen Sie Ihre Entscheidung, ohne die einzelnen Funktionen zu berechnen. Überlegen Sie mithilfe des Einheitskreises.

a) $\sin 17° > \sin 125°$
b) $\cos 6° < \cos 354°$
c) $\cos 55° > \cos(-54°)$
d) $\tan 89° < \tan 91°$

5. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Treffen Sie Ihre Entscheidung, ohne die einzelnen Funktionen zu berechnen. Überlegen Sie mithilfe des Einheitskreises.

a) $\sin 0.001° < 0$
b) $\tan 0.5° > 0$
c) $\cos 0.2° < 1$
d) $\sin 90° > 1$

6. Zeigen Sie, dass der Cosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ eine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras für schiefwinklige Dreiecke ist. Wie beeinflussen die Winkel (spitz oder stumpf) den Term $-2ab\cos\gamma$?

7. Zeigen Sie, dass die folgenden Identitäten gelten.

a) $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}}$
b) $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$
c) $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}}$
d) $\sin\varphi = \dfrac{\tan\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}}$

8. Füllen Sie die folgende Tabelle aus, indem Sie mithilfe des Einheitskreises die speziellen Funktionswerte bestimmen.

Argument α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$0°$			
$90°$			
$180°$			
$270°$			

9. Ein regelmässiges Vieleck hat einen Inkreis mit Radius $r = 1\,\text{m}$. Bearbeiten Sie die folgenden Aufträge mithilfe von Überlegungen am Einheitskreis.

a) Zeigen Sie, dass der Umfang eines regelmässigen Sechsecks $12 \cdot (\tan 30°)\,\text{m}$ beträgt.
b) Wie steht es mit dem Umfang anderer regelmässiger Vielecke (8-Eck, 12-Eck, …)? Stellen Sie Vermutungen auf und versuchen Sie, diese zu beweisen.

Übungen 17

10. Berechnen Sie jeweils im Dreieck $\triangle ABC$ die fehlenden Seiten und Winkel.
Achtung: Bei einigen Beispielen gibt es mehrere Lösungen!

a) $a = 23\,\text{cm},\ \alpha = 19.1°,\ \beta = 72.3°$
b) $c = 29\,\text{cm},\ \alpha = 42°,\ \beta = 19.7°$
c) $b = 65\,\text{mm},\ c = 95\,\text{mm},\ \gamma = 34.1°$
d) $a = 70.5\,\text{m},\ b = 33.4\,\text{m},\ \beta = 25°$
e) $b = 6.42\,\text{km},\ c = 8.91\,\text{km},\ \beta = 35°$
f) $b = 5.2\,\text{dm},\ w_\alpha = 7\,\text{dm},\ \gamma = 134°$

11. Bestimmen Sie jeweils im Dreieck $\triangle ABC$ die fehlenden Seiten und Winkel (allgemeine Formeln). Gegeben sind

a) $b,\ \alpha,\ \beta$
b) $a,\ \beta,\ \gamma$

12. Berechnen Sie den Umfang des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ mit der Seite $a = 23\,\text{cm}$ und dem Winkel $\alpha = 19.1°$.

13. Berechnen Sie die Länge der Winkelhalbierenden w_α im gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit der Basis $c = 183\,\text{mm}$ und den Winkeln $\alpha = \beta = 50.8°$.

14. Berechnen Sie mithilfe der Winkelhalbierenden in einem halben gleichseitigen Dreieck die exakten Werte für

a) $\tan 30°$
b) $\tan 15°$

Übungen 18

15. Berechnen Sie jeweils im Dreieck $\triangle ABC$ die fehlenden Seiten und Winkel.

a) $a = 45\,\text{cm},\ b = 38\,\text{cm},\ c = 55\,\text{cm}$
b) $b = 31\,\text{mm},\ c = 12\,\text{mm},\ \beta = 68°$
c) $a = 1.4\,\text{m},\ b = 1.8\,\text{m},\ \gamma = 102.9°$
d) $a = 36\,\text{cm},\ b = 6.5\,\text{dm},\ c = 432\,\text{mm}$

16. Berechnen Sie jeweils im Dreieck $\triangle ABC$ die fehlenden Seiten und Winkel.

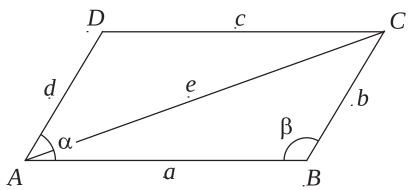
a) $b = 46.5$ cm, $w_\alpha = 64.1$ cm, $\gamma = 124.4°$
b) $a = 14$ m, $h_b = 3$ m, $\alpha = 147°$
c) $b = 68$ cm, $s_b = 47$ cm, $c = 53$ cm
d) $\alpha = 70.8°$, $\beta = 62.5°$, $w_\beta = 21$ m
e) $b = 5.2$ cm, $s_a = 7.1$ cm, $\gamma = 104.6°$
f) $a + b = 7.5$ mm, $h_c = 2.8$ mm, $\beta = 49.3°$

17. Bestimmen Sie jeweils im Dreieck $\triangle ABC$ die fehlenden Seiten und Winkel (allgemeine Formeln). Gegeben sind

a) a, b, c
b) a, c, β

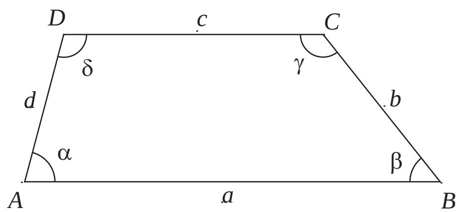
18. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel des Parallelogramms $ABCD$.

a) $a = 23$ m, $e = 26$ m, $\alpha = 38°$
b) $a = 12$ cm, $b = 8$ cm, $e = 15$ cm
c) $b = 38$ mm, $e = 52$ mm, $\beta = 76°$



19. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel des Trapezes $ABCD$.

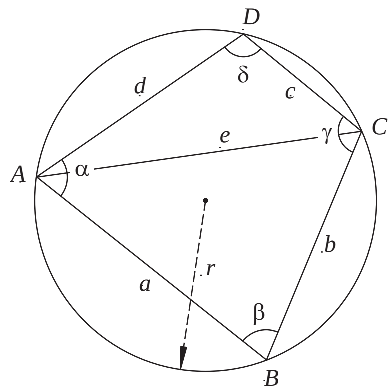
a) $a = 9$ mm, $b = 5$ mm, $\alpha = 38°$, $\beta = 79°$
b) $a = 13$ cm, $b = 5$ cm, $c = 9$ cm, $d = 4$ cm
c) $a = 16$ m, $c = 11$ m, $\gamma = 113°$, $\delta = 98°$



20. Von einem Dreieck $\triangle ABC$ sind der Umkreisradius $r = 14$ cm sowie die beiden Winkel $\alpha = 37°$ und $\beta = 71°$ gegeben. Wie lang sind die drei Seiten des Dreiecks?

21. Berechnen Sie Umfang und Fläche des Sehnenvierecks, von welchem folgende Grössen bekannt sind:

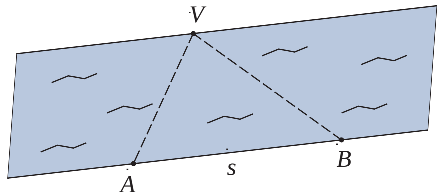
a) Umkreisradius $r = 630$ mm, Seite $b = 735$ mm, Winkel $\gamma = 110°$ und $\delta = 95°$
b) Seiten $a = 8$ cm und $c = 7$ cm, Diagonale $e = 10$ cm, Winkel $\beta = 83°$.



22. Wie gross sind die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten sich wie $6:5:9$ verhalten?

23. Ein Viereck ist gegeben durch $a = 751$ mm, $b = 402$ mm, $c = 928$ mm, $d = 623$ mm und $\alpha = 128°$. Wie gross sind die Schnittwinkel der Diagonalen?

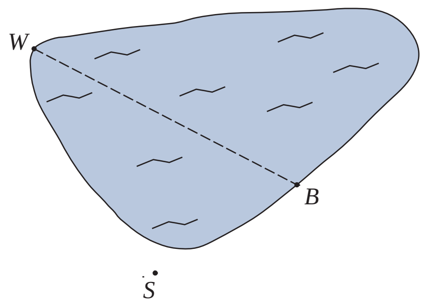
24. Für die Projektierung einer Brücke wird die Breite eines Flusses benötigt. Da die vorhandenen Kartengrundlagen zu ungenau sind, soll die Flussbreite durch indirekte Messung bestimmt werden. An einem Ufer wird dort, wo die Brücke geplant ist, ein gut sichtbarer Vermessungsstab V eingesteckt.



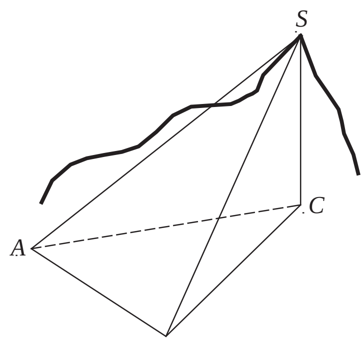
Am anderen Ufer wird ungefähr gegenüber des Stabes eine Strecke s von $s = 35\ \mathrm{m}$ Länge abgemessen und die Streckenenden A und B werden markiert. Nun wird von A aus der Winkel $\angle VAB = 62.3°$ und von B aus der Winkel $\angle VBA = 48.5°$ gemessen. Wie breit ist der Fluss?

25. Von einem $18\ \mathrm{m}$ hohen Aussichtsturm aus soll der Wasservorrat in einem Weiher mithilfe von Winkelmessungen abgeschätzt werden. Der Turm steht auf der gleichen Meereshöhe wie der Wasserspiegel und der Weiher ist nahezu rund (kreisförmig). Die Vermesserin sieht das nächstgelegene Ufer des Weihers unter einem Tiefenwinkel von 14°. Den am weitesten entfernten Uferbereich sieht sie unter einem Tiefenwinkel von 8°. Zusätzlich geht sie von einer durchschnittlichen Wassertiefe von $1.2\ \mathrm{m}$ aus. Wie viel Wasser enthält der Weiher?

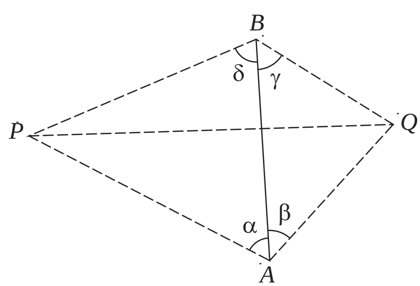
26. Ein Schwimmer möchte wissen, wie lange er vom Strandbad Chatzensee B zum Seeufer beim Weiler W schwimmen muss. Er schwimmt mit einer Geschwindigkeit von $40\ \mathrm{m}$ pro Minute und kennt die Wegdistanz zwischen dem Strandbad und dem Seehof S ($\overline{BS} = 380\ \mathrm{m}$) sowie zwischen dem Seehof und dem Weiler ($\overline{WS} = 550\ \mathrm{m}$). Zusätzlich misst er den Winkel $\angle WSB = 73.6°$.
Wie lange schwimmt er vom Strandbad zum Ufer beim Weiler?



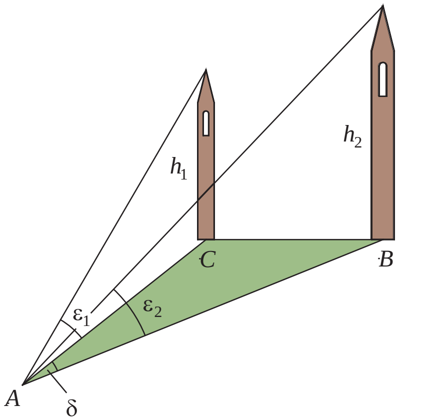
27. Ein Berg wird vermessen. Unter anderem soll bestimmt werden, wie hoch die Bergspitze über die Ebene ragt. Dazu wird eine Skizze mit dem Hilfspunkt C erstellt; dieser liegt auf Höhe der Ebene, senkrecht unter der Bergspitze. Dann werden von den beiden Punkten A und B aus (beide liegen in der Ebene) diverse Messungen gemacht: Die Strecke $\overline{AB}$ ist $200\ \mathrm{m}$ lang. Der Winkel $\angle SAB = 84°$, $\angle SBA = 88°$ und der Höhenwinkel von A zur Bergspitze $57°$. Wie hoch über der Ebene liegt die Bergspitze (Distanz $\overline{CS}$)?



28. Die Entfernung $\overline{PQ}$ zweier unzugänglicher Punkte P und Q voneinander soll bestimmt werden. Dazu wird zwischen den beiden Punkten eine Strecke $s = \overline{AB} = 450\ \mathrm{m}$ vermessen und von A und B aus werden folgende Winkel gemessen: $\alpha = 41.2°$, $\beta = 61.9°$, $\gamma = 68.3°$ und $\delta = 74.1°$. Alle Winkel und Strecken wurden horizontal gemessen.

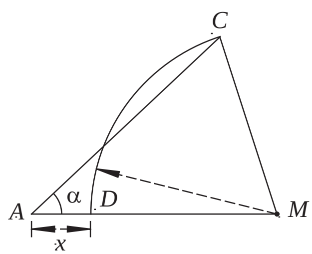


29. Zwei Kirchtürme haben die Höhen $h_1 = 65\,\mathrm{m}$ und $h_2 = 90\,\mathrm{m}$. Ihre Fusspunkte befinden sich mit dem Auge A einer Beobachterin in einer horizontalen Ebene. Von A aus werden die Höhenwinkel $\varepsilon_1 = 9.5°$ und $\varepsilon_2 = 11.3°$ zu den Kirchturmspitzen gemessen. Aus einer Karte kann der Horizontalwinkel $\delta = 37.4°$ entnommen werden. Wie weit sind die Turmspitzen voneinander entfernt?

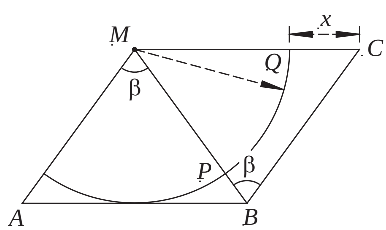


30. Zwei Lastwagen fahren gleichzeitig von einer Strassenkreuzung in verschiedene Richtungen geradlinig ab. Die beiden Strassen bilden einen Winkel von 102.4° und die Geschwindigkeiten der beiden Lastwagen betragen $72\,\mathrm{km/h}$ beziehungsweise $58\,\mathrm{km/h}$. Wie weit sind die beiden Lastwagen nach 20 Minuten voneinander entfernt?

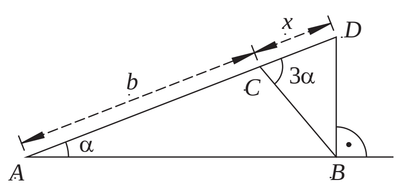
31. In der abgebildeten Figur sind $\alpha = 50°$ und $\overline{AC} = \overline{AM} = 7\,\mathrm{cm}$. M ist der Mittelpunkt des eingezeichneten Kreisbogens. Wie lang ist $x = \overline{AD}$?



32. In der abgebildeten Figur sind $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{BC}$, beide Winkel $\beta = 72°$ und $BP = 3\,\mathrm{cm}$. M ist der Mittelpunkt des eingezeichneten Kreisbogens. Wie lang ist $x = \overline{CQ}$?

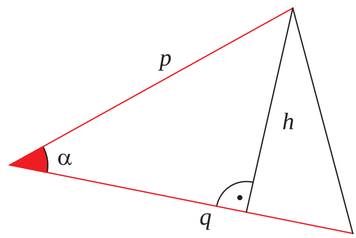


33. In der abgebildeten Figur sind die Strecke $\overline{AC} = b$ und der Winkel α gegeben. Geben Sie eine Gleichung für $x = \overline{CD}$ in Abhängigkeit von b und α an.



Übungen 19

34. Leiten Sie den Flächensatz für Dreiecke aus p, q und α her. Berechnen Sie zuerst die Höhe h aus p und α und setzen Sie dann das Ergebnis für h in die bekannte Flächenformel $A = gh/2$ ein.



35. Wenden Sie den Flächensatz für folgende Dreiecke an und halten Sie fest, was Ihnen auffällt.

a) $p = 5\,\text{cm}, q = 8\,\text{cm}, \alpha = 90°$ b) $p = 5\,\text{cm}, q = 8\,\text{cm}, \alpha = 42°$
c) $p = 5\,\text{cm}, q = 8\,\text{cm}, \alpha = 138°$

36. Berechnen Sie den Flächeninhalt der folgenden Dreiecke.

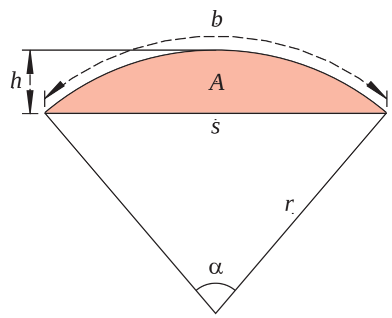
a) $a = 125\,\text{m}, c = 138\,\text{m}, \beta = 78.3°$ b) $a = 45\,\text{dm}, b = 50\,\text{dm}, c = 56\,\text{dm}$

37. Von einem Dreieck mit dem Flächeninhalt $A = 12\,\text{cm}^2$ sind die beiden Seiten $a = 8.2\,\text{cm}$ und $b = 5.5\,\text{cm}$ gegeben. Berechnen Sie den Winkel γ des Dreiecks. Überlegen Sie auch, ob mehrere Lösungen möglich sind.

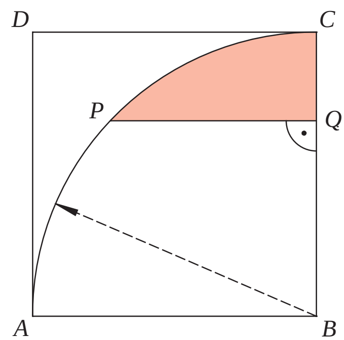
38. Von einem Dreieck mit dem Flächeninhalt $A = 2.2\,\text{dm}^2$ sind die Seite $a = 4.5\,\text{dm}$ und der Winkel $\beta = 35°$ gegeben. Berechnen Sie die fehlenden Seiten des Dreiecks.

39. Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Segments.

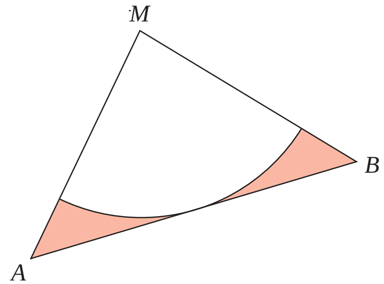
a) $r = 5.2\,\text{cm}, \alpha = 110°$
b) $r = 12\,\text{cm}, b = 18\,\text{cm}$
c) $\alpha = 19°, s = 37\,\text{cm}$
d) $r = 8\,\text{cm}, h = 2\,\text{cm}$
e) r und s sind gegeben (allgemeiner Fall)
f) α und s sind gegeben (allgemeiner Fall)



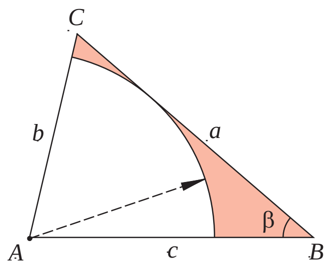
40. Die abgebildete Figur ist als Ganzes ein Quadrat. Gegeben sind $\overline{AB} = 15\,\text{cm}$ und $\overline{PQ} = 11\,\text{cm}$. Welchen Inhalt hat die hervorgehobene Fläche?



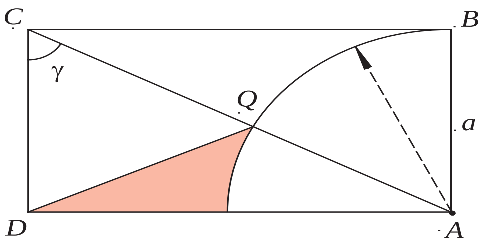
41. Im abgebildeten gleichschenkligen Dreieck ist $\overline{AM} = \overline{BM} = 22\ \text{cm}$ und $\overline{AB} = 35\ \text{cm}$. M ist der Mittelpunkt des Kreisbogens und $\overline{AB}$ eine Tangente an den Kreisbogen. Welchen Inhalt hat die hervorgehobene Fläche?



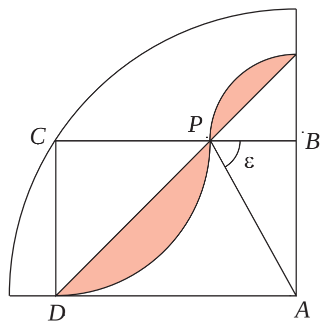
42. $\triangle ABC$ ist ein Dreieck mit den Seiten $a = 32\ \text{m}$, $b = 24\ \text{m}$ und dem Winkel $\beta = 0.75$. A ist der Mittelpunkt des Kreisbogens und a die Tangente am Kreisbogen. Welchen Inhalt hat die hervorgehobene Fläche?



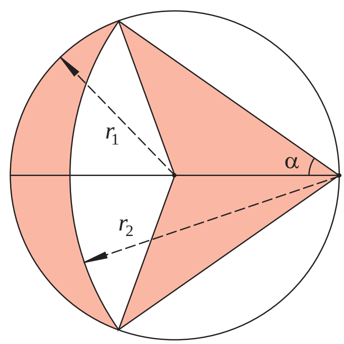
43. Die Figur $ABCD$ ist ein Rechteck. A ist der Mittelpunkt des Kreisbogens; der Radius entspricht der Seite $\overline{AB}$. Q ist der Schnittpunkt des Kreisbogens mit der Diagonalen des Rechtecks. Gegeben sind die Seite $a = 8\ \text{cm}$ und der Winkel $\gamma = 62°$. Welchen Inhalt hat die hervorgehobene Fläche?



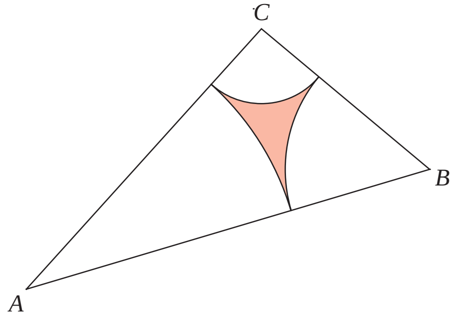
44. Einem Viertelkreis wird ein Rechteck $ABCD$ so einbeschrieben, dass die Ecke A auf den Kreismittelpunkt zu liegen kommt. B und C sind die Mittelpunkte der beiden kleineren Kreisbogen. Gegeben sind $\overline{AP} = 35\ \text{mm}$ und $\varepsilon = 34°$. Welchen Inhalt hat die hervorgehobene Fläche?



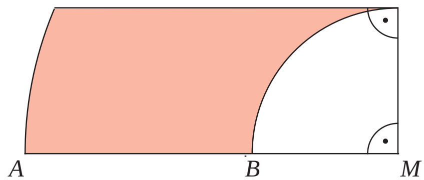
45. Berechnen Sie den Flächeninhalt der hervorgehobenen (zweigeteilten) Figur für $r_1 = 10\ \text{cm}$ und $\alpha = 35°$.



46. In einem Dreieck sind die drei Seiten gegeben: $\overline{AB} = 20\,\text{mm}$, $\overline{BC} = 26\,\text{mm}$ und $\overline{AC} = 18\,\text{mm}$. A, B und C sind die Mittelpunkte der eingezeichneten Kreisbogen. Diese berühren sich paarweise. Welchen Inhalt hat die hervorgehobene Fläche?



47. In der abgebildeten Figur ist M der Mittelpunkt der beiden Kreisbogen. Folgende Strecken sind gegeben: $\overline{AB} = 43\,\text{mm}$, $\overline{BM} = 26\,\text{mm}$. Welchen Inhalt hat die hervorgehobene Fläche?



48. Berechnen Sie die Seitenlänge, den Umkreisradius sowie den Flächeninhalt eines regulären 10-Ecks mit Inkreisradius $r = 50\,\text{cm}$.

49. Bestimmen Sie den Flächeninhalt eines regulären n-Ecks,

- **a)** wenn die Seitenlänge a und n gegeben sind.
- **b)** wenn der Inkreisradius r und n gegeben sind.
- **c)** wenn der Umkreisradius ρ und n gegeben sind.