

Marthaler, Jakob, Schudel
Mathematik II

Hans Marthaler, Benno Jakob, Katharina Schudel
Unter Mitarbeit von Reto Reuter und Matthias P. Burkhardt

Mathematik II

Geometrie für die Berufsmaturität

Lösungen



der bildungsverlag
www.hep-verlag.ch



Hans Marthaler, Benno Jakob, Katharina Schudel
Unter Mitarbeit von Reto Reuter und Matthias P. Burkhardt

Mathematik II

Geometrie für die Berufsmaturität

Lösungen zur 4. Auflage

2. Auflage 2019

Alle Rechte vorbehalten

© 2019 hep verlag ag, Bern

www.hep-verlag.ch

Planimetrie

1 Winkel

Lösungen zu Übungen 1

- | | |
|--|--|
| 1. a) $180 - \beta = \alpha + \gamma$ | b) $\varphi = 180 - \beta$ |
| 2. a) $\alpha = 137^\circ$ | b) $\alpha = 105^\circ; \beta = 120^\circ$ |
| c) $\alpha = 45^\circ$ | d) $\alpha = 22^\circ; \beta = 124^\circ$ |
| 3. $\alpha = 20^\circ$ | |
| 4. $\varepsilon = 135^\circ - \frac{3}{4}\alpha; 78^\circ$ | |
| 5. a) $\alpha = 58^\circ; \beta = 32^\circ; \gamma = 64^\circ$ | b) $\alpha = 10^\circ; \gamma = 76^\circ$ |
| c) $\alpha = 26^\circ; \beta = 112^\circ$ | d) $\alpha = 63^\circ$ |
| 6. a) $\beta = 3\alpha; \beta = 114^\circ$ | b) $\beta = 4\alpha; \beta = 152^\circ$ |
| 7. a) $\varepsilon = 180^\circ - 2\alpha$ | b) $\varepsilon = \frac{\alpha + 2\beta}{2}$ |
| 8. a) $\varepsilon = 100^\circ$ | b) $\varepsilon = 180^\circ - 2\gamma$ |
| c) $\varepsilon = 0^\circ$; parallel | d) kein Schnittpunkt, nicht parallel |

Lösungen zu Übungen 2

- | | | |
|---|---------------------------------|----------------------------------|
| 9. a) $\gamma = \alpha + \alpha'; \varphi = 2\alpha + 2\alpha'$ | b) Formel aus a) gilt allgemein | c) $\gamma + \delta = 180^\circ$ |
| 10. a) $\alpha = 29^\circ$ | b) $\beta = 45^\circ$ | |
| c) $\gamma = 54^\circ$ | d) $\delta = 21^\circ$ | |
| 11. $\beta = 90^\circ - \alpha$ | | |
| 12. a) $\alpha = 12.857^\circ$ | b) $\beta = 36^\circ$ | |

2 Dreiecke

Lösungen zu Übungen 3

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1. a) 1 Lösung | b) unendlich viele Lösungen |
| c) 1 Lösung | d) 1 Lösung |
| e) 2 Lösungen | f) 1 Lösung |
| 2. Konstruktionen | |
| 3. Konstruktion | |
| 4. Konstruktion | |
| 5. a) 13.4 cm^2 | b) 16.96 m^2 |
| 6. a) $h_a = 56 \text{ cm}; h_b = 24 \text{ cm}$ | b) $c = 2.5 \text{ m}$ |

Lösungen zu Übungen 4

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 7. a) $h_a = 2.078 \text{ m}$ | b) $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ |
| 8. $h = 2.4 \text{ m}$ | |
| 9. a) $x = 0.96 \text{ m}$ | b) $x = \frac{4 - a^2}{4}$ |
| 10. 6.325 cm | |

3 Viereck und Vieleck

Lösungen zu Übungen 6

- | | | |
|---|-------------------------------|-----------------------------|
| 1. a) $A = a \cdot h_a$ | b) $A = \frac{e \cdot f}{2}$ | c) $A = m \cdot h$ |
| 2. a) $A = 361 \text{ cm}^2$ | b) $A = 348.48 \text{ m}^2$ | c) $A = 420.25 \text{ m}^2$ |
| 3. a) $A = 14\,030.658 \text{ m}^2$ | b) $A = 127.5 \text{ cm}^2$ | c) $A = 25.536 \text{ m}^2$ |
| 4. $a = 2.8 \text{ dm}; b = 5.6 \text{ dm}$ | | |
| 5. a) $A = 113.4 \text{ cm}^2$ | b) $A = 2204 \text{ cm}^2$ | |
| 6. $b = 4.8 \text{ cm}$ | | |
| 7. a) $A = 170 \text{ cm}^2$ | b) $A = 2911.58 \text{ cm}^2$ | |
| 8. a) $A = 3547.24 \text{ mm}^2$ | b) $A = 3360 \text{ cm}^2$ | |
| 9. a) $A = 253 \text{ cm}^2$ | b) $A = 94.81 \text{ cm}^2$ | |
| 10. $x = 3 \text{ cm}$ | | |
| 11. a) 48 cm^2 | b) $A = \frac{3s^2}{4}$ | |
| 12. $A = \frac{(a-b)^2}{2}$ | | |
| 13. $A = 117 \text{ cm}^2$ | | |
| 14. $x = \frac{2}{3}b$ | | |
| 15. a) $x = 26.1 \text{ cm}$ | b) $x = 10.667 \text{ cm}$ | |

Lösungen zu Übungen 7

16. Der Peripheriewinkel ist halb so gross wie der Zentriwinkel über der gleichen Sehne.
17. $\triangle MAP \cong \triangle MBP$, rechtwinklig, Kathete r und Hypotenuse \overline{MP} gemeinsam
18. Skizze
- | | |
|---|--|
| 19. a) $A = 194\,688 \text{ mm}^2$ | b) $A = 912.04 \text{ cm}^2$ |
| 20. $A = 1680 \text{ cm}^2$ | |
| 21. $\alpha = 100^\circ; \beta = 80^\circ$ | |
| 22. $l = 1.972r$ | |
| 23. $b = c = r = 9 \text{ cm}$ | |
| 24. a) gleichschenkliges Trapez | b) Rechteck |
| 25. $x = 11 \text{ cm}$ | |
| 26. a) keines | b) $n > 32$ -eck |
| 27. a) $\varphi = \frac{360}{n}; \alpha = 180 - \varphi$ | b) $\varphi = \frac{360}{n}; \alpha = 180 - \varphi$ |
| 28. $n(180 - 2\beta) = 360$ | |
| 29. $r = 5 \text{ cm}; \rho = 4.33 \text{ cm}; A = 64.952 \text{ cm}^2$ | |
| 30. $\alpha = 77.143^\circ; \beta = 25.714^\circ$ | |
| 31. a) $\beta = 75^\circ; \gamma = 135^\circ$ | b) $\alpha = 108^\circ$ |

4 Kreis und Kreisteile

Lösungen zu Übungen 8

1. $A = \frac{U^2}{4\pi}$
2. a) $A = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right); U = a(2 + \pi)$ b) $A = \frac{\pi}{4} ab; U = \pi(a + b)$
- c) $A = r^2 \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right); U = 2r(\pi + 3)$ d) $A = \frac{a^2}{12} (3\sqrt{3} - \pi); U = \frac{a}{3} (9 + \pi\sqrt{3})$
3. $A = 443.297 \text{ cm}^2; U = 147.956 \text{ cm}$
4. a) $A = s^2; U = s \cdot \pi(2 + \sqrt{2})$ b) $A = \frac{s^2}{24} (\pi + 6\sqrt{3}); U = \frac{s \cdot \pi}{6} (4\sqrt{3} + 9)$
5. $A = \frac{a^2}{8} (\pi - 2)$
6. a) $A = \frac{a^2 \cdot \pi}{2}; U = 2a \cdot \pi$ b) $A_S : A_W = 1 : 1$
7. $A_Q : A_D : A_K = 9\pi : 4\pi\sqrt{3} : 36$
8. $A_{KR} = \frac{a^2 \pi}{4}$
9. $A = \frac{\pi}{4} s^2$
10. $x = r(\sqrt{5} - 1)$
11. $A = 1.112 r^2$

Lösungen zu Übungen 9

12. a) $A = 13.09 \text{ cm}^2$ b) $\alpha = 71.62^\circ$
- c) $r = 5.642 \text{ cm}$
13. $A = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{5r \cdot r}{2} = \frac{5r^2}{2}; A = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ}; \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ} = \frac{5r^2}{2}; \frac{\pi \alpha}{360^\circ} = \frac{5}{2} \rightarrow \alpha = \frac{900^\circ}{\pi} \approx 286.479^\circ$
14. $b = \frac{s \cdot \pi}{3}$
15. a) $A = s^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right); U = s \cdot \pi$ b) $A = s^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right); U = 2s \cdot \pi$
- c) $A = a^2 \left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right); U = \frac{2s \cdot \pi}{3}$ d) $A = \frac{s^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right); U = \frac{3s \cdot \pi}{2}$
16. a) $A = r^2 (\sqrt{3} - 2\pi + 6); U = 2r(2\pi + 3)$ b) $A = a^2 \left(\frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{2} - \pi + 1\right); U = \frac{a \cdot \pi \sqrt{2}}{2}$
- c) $A = \frac{R^2}{2} \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right); U = 4\pi \cdot R$ d) $A = \frac{s^2}{4} (\pi - \sqrt{3}); U = s \left(3 + \frac{\pi}{2}\right)$
17. a) $A = r^2$ b) $A = r^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
18. $A = r^2 \left(2\sqrt{2} + 2 + \frac{5\pi}{4}\right)$
19. $A = a^2 \left(\frac{\pi - 2\sqrt{2} + 1}{4}\right)$
20. $b_1 : b_2 = 1 : 1$
21. a) $A_1 = A_2 = \frac{s^2}{8} \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$ b) $U_1 = \frac{s}{2} \left(4 + \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right); U_2 = \frac{s}{2} (4 + \pi - \sqrt{2})$

30. a) 70.71 %

b) 141.42 %

c) 200 %

31. $A = \frac{4a^2}{9}$

32. a) $A_s = \frac{s^2 \sqrt{3}}{24}$

b) $A_s = \frac{A}{12}$

33. $A_1 : A_2 = 9 : 4$

34. $p = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2)}}{2}$

35. $s = \frac{ab}{a+b}$

36. a) $A_s = 294 \text{ cm}^2$

b) $A = 23.94 \text{ cm}^2$

37. a) $A_s = \frac{ab}{6}$

b) $A_s = \frac{ab}{5}$

38. $A_s : A = 3 : 10$

39. a) $F_1 : F_2 = a^2 : c^2$

b) $F_3 = F_4$

40. $\sqrt{2}, A_1 : A_2 = 2 : 1$

41. $r_2 = 2 \text{ cm}$

42. a) $A_4 = \left(\frac{3}{4}\right)^6 \cdot \frac{\pi a^2}{6} = \frac{243 \pi a^2}{8192}$

b) $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{2(n-1)} \cdot \frac{\pi a^2}{6}$

Lösungen zu Übungen 12

43. Konstruktionen

44. Konstruktionen

45. Konstruktionen

46. $\triangle ABC$ gleichschenkelig; $\triangle APC$ gleichschenkelig; $\triangle BAP$ gleichschenkelig47. $x = 20.944 \text{ cm}$; $x - 8 = 12.944 \text{ cm}$; $2x - 8 = 33.888 \text{ cm}$ 48. $\overline{AB} : \overline{BE} = 1 : \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ 49. a) $\triangle ACD \approx \triangle DQC \approx \triangle QPD$; gleichschenkelig, Basiswinkel = $\frac{180^\circ - 36^\circ}{2}$ b) $\overline{AD} : \overline{DC} = \overline{DC} : \overline{DQ}$; $\overline{AD} = 1.618$; $\overline{DC} = 1$; $\overline{DQ} = 0.618$

Trigonometrie

6 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Lösungen zu Übungen 13

1. a) 0.576
c) 0.002
2. a) 8.021°
c) 68.755°
3. a) 0.4067
c) 0.5878
4. a) $b = 34.92 \text{ cm}$; $c = 47.37 \text{ cm}$; $\beta = 47.5^\circ$
b) $a = 75.718 \text{ m}$;
 $b = 78.408 \text{ m}$;
 $\alpha = 44^\circ$
c) $a = 21.603 \text{ m}$; $c = 27.490$; $\alpha = 51.8^\circ$
d) $a = 31.686 \text{ mm}$;
 $c = 66.091 \text{ mm}$; $\beta = 1.071$
e) $a = 25.845 \text{ cm}$; $b = 13.154 \text{ cm}$; $\beta = 0.471$
f) $b = 13.042 \text{ mm}$;
 $c = 19.134 \text{ mm}$; $\alpha = 0.821$
5. a) 0.1650
c) 0.5403
6. a) $\beta = 66.5^\circ$; $c = 18.537 \text{ dm}$; $a = 7.392 \text{ dm}$
b) $\alpha = 47.5^\circ$; $b = 52.7 \text{ m}$;
 $a = 57.508 \text{ m}$
c) $\alpha = 0.671$; $c = 53.09 \text{ cm}$; $b = 41.60 \text{ cm}$
d) $\beta = 1.121$; $a = 9.134 \text{ dm}$;
 $b = 18.909 \text{ dm}$
e) $\alpha = 83^\circ$; $b = 36.561 \text{ m}$; $a = 297.764 \text{ m}$
f) $\alpha = 74^\circ$; $a = 255,279 \text{ cm}$;
 $c = 265.566 \text{ cm}$
7. a) 0.0875
c) 0.6421
8. a) $\beta = 51.5^\circ$; $c = 67.468 \text{ m}$; $b = 52.801 \text{ m}$
b) $\beta = 1.271$; $a = 5.319 \text{ mm}$;
 $b = 17.196 \text{ mm}$
c) $\alpha = 57.5^\circ$; $c = 106.712 \text{ mm}$; $b = 57.336 \text{ mm}$
d) $\beta = 0.571$ $a = 3.894 \text{ dm}$;
 $c = 4.627 \text{ cm}$
e) $\alpha = 83^\circ$; $b = 36.561 \text{ m}$; $a = 297.764 \text{ m}$
f) $\alpha = 74^\circ$; $a = 255,279 \text{ cm}$;
 $c = 265.566 \text{ cm}$
9. a) $\frac{a}{c} = \frac{a}{c}$
b) $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \rightarrow a^2 + b^2 = c^2$
c) $\frac{b}{c} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} \rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$
d) $1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{\frac{b^2}{c^2}} \rightarrow a^2 + b^2 = c^2$
10. a) $\frac{5}{4}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{2}$

Lösungen zu Übungen 14

11. a) $30^\circ \rightarrow \frac{\pi}{6}$ b) $83.826^\circ \rightarrow 1.463$ c) $21.274^\circ \rightarrow 0.371$
12. a) $41.410^\circ \rightarrow 0.723$ b) $\beta =$ nicht definiert c) $109.259^\circ \rightarrow 1.907$
13. a) $37.235^\circ \rightarrow 0.650$ b) $33.5^\circ \rightarrow 0.585$ c) $89.427^\circ \rightarrow 1.561$
14. a) $\delta = 20^\circ$ b) $\delta = 0.617^\circ$ c) $\delta = 65.9^\circ$
 d) $\delta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ e) $\delta = 44.996^\circ$ f) $\delta = 74.948^\circ$
15. a) $\alpha = 61.288^\circ$; $b = 5.861$ m; $\beta = 28.712^\circ$ b) $\alpha = 32.312^\circ$;
 $\beta = 57.688^\circ$;
 $c = 13.844$ dm
 c) $c = 181.22$ cm; $a = 172.350$ cm; $\alpha = 72^\circ$ d) $\alpha = 43.813^\circ$;
 $\beta = 46.187^\circ$;
 $b = 84.427$ mm
 e) $a = 1.625$ m; $b = 1.483$ m; $\beta = 42.4^\circ$ f) $\alpha = 59.003^\circ$;
 $\beta = 30.997^\circ$;
 $a = 171.438$ m
 g) $\alpha = 41.81^\circ$; $\beta = 48.19^\circ$; $b = 22.36$ cm h) nicht definiert bzw. unendlich viele Lösungen
 i) $c = 119.357$ mm; $a = 116.919$ mm; $\beta = 11.6^\circ$ j) $\alpha = 66.132^\circ$;
 $c = 12.357$ m;
 $\beta = 23.868^\circ$

Lösungen zu Übungen 15

16. a) $\alpha = 5.711^\circ$ b) $\alpha = 16.699^\circ$ c) $\alpha = 45^\circ$
17. a) $a = 17.633$ % b) $a = 36.4$ % c) $a = 274.748$ %
18. a) $\alpha = 78.69^\circ \rightarrow 500$ % b) $\alpha = 60.535^\circ \rightarrow 180$ % c) $\alpha = 36.87^\circ \rightarrow 75$ %
19. $c = 7.442$ m
20. $c = 2282.307$ m
21. $\alpha = 74.038^\circ$
22. a) $a = 46.321$ cm; $b = 34.905$ m b) $a = 59.867$ cm; $b = 43.496$ m
 c) $\alpha = \frac{\varphi}{2}$; $a = e \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right)$; $b = e \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)$
23. Winkel zwischen Seite und Diagonale: $\alpha = 23.85^\circ$; $\beta = 66.15^\circ$
 Winkel zwischen den Diagonalen: $\gamma = 132.30^\circ$; $\varphi = 47.70^\circ$
24. $\gamma = 40^\circ$; $h_c = 70.5$ mm $\rightarrow c = 51.3$ mm; $A = 1807.8$ mm²
25. $\varphi = 88.854^\circ$; $b = 31.016$ cm; $A = 310.159$ cm²
26. $A = 121.554$ cm²
27. $\alpha = 53.951^\circ$
28. a) $\alpha = 54.736^\circ$ b) $\beta = 35.264^\circ$
 c) $\varphi = 70.529^\circ$ bzw. 109.471°
29. a) $r = \frac{h}{\tan \alpha}$ b) $r = 19.673$ cm

11. a) $\gamma = 180 - \alpha - \beta$; $a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$; $c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$ b) $\alpha = 180 - \beta - \gamma$; $b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$; $c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$
12. $U = 220.821 \text{ cm}$
13. $w_\alpha = 146.030 \text{ mm}$
14. a) $\tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\tan(15^\circ) = 2 - \sqrt{3}$

Lösungen zu Übungen 18

15. a) $\alpha = 54.219^\circ$; $\beta = 43.240^\circ$; $\gamma = 82.541^\circ$
 b) $\alpha = 90.967^\circ$; $\gamma = 21.033^\circ$; $a = 33.430 \text{ mm}$
 c) $c = 2.515 \text{ m}$; $\alpha = 32.862^\circ$; $\beta = 44.238^\circ$
 d) $\gamma = 38.654^\circ$; $\alpha = 31.367^\circ$; $\beta = 109.979^\circ$
16. a) $\alpha = 37.666^\circ$; $\beta = 17.934^\circ$; $a = 92.278 \text{ cm}$; $c = 124.604 \text{ cm}$
 b) $\gamma = 12.374^\circ$; $c = 5.508 \text{ m}$; $\beta = 20.626^\circ$; $b = 9.055 \text{ m}$
 c) $\alpha = 60.841^\circ$; $a = 62.618 \text{ cm}$; $\beta = 71.501^\circ$; $\gamma = 47.658^\circ$
 d) $\gamma = 46.700^\circ$; $b = 26.505 \text{ m}$; $a = 28.219 \text{ m}$; $c = 21.747 \text{ m}$
 e) $a = 7.396 \text{ cm}$; $c = 10.056 \text{ cm}$; $\alpha = 45.373^\circ$; $\beta = 30.027^\circ$
 f) $a = 3.693 \text{ mm}$; $\alpha = 47.353^\circ$; $b = 3.807 \text{ mm}$; $\gamma = 83.347^\circ$; $c = 4.987 \text{ mm}$
17. a) $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$; $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a \cdot \sin \gamma}{c}\right)$; $\beta = 180 - \alpha - \gamma$
 b) $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta}$; $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a \cdot \sin \beta}{b}\right)$; $\gamma = 180 - \alpha - \beta$
18. a) $b = 3.681 \text{ m}$; $\beta = 142^\circ$
 b) $\alpha = 84.920^\circ$; $\beta = 95.080^\circ$
 c) $a = 45.861 \text{ mm}$; $\alpha = 104^\circ$
19. a) $c = 1.764 \text{ mm}$; $d = 7.972 \text{ mm}$; $\gamma = 101^\circ$; $\delta = 142^\circ$
 b) $\alpha = 77.364^\circ$; $\beta = 51.318^\circ$; $\gamma = 128.682^\circ$; $\delta = 102.636^\circ$
 c) $b = 9.614 \text{ m}$; $d = 8.936 \text{ m}$; $\alpha = 82^\circ$; $\beta = 67^\circ$
20. $a = 16.851 \text{ cm}$; $b = 26.475 \text{ cm}$; $c = 26.630 \text{ cm}$
21. a) $U = 35.037 \text{ dm}$; $A = 74.160 \text{ dm}^2$
 b) $U = 28.39 \text{ cm}$; $A = 50.026 \text{ cm}^2$
22. $\alpha = 38.942^\circ$; $\beta = 31.586^\circ$; $\gamma = 109.471^\circ$
23. 55.759° bzw. 124.241°
24. $h = 24.827 \text{ m}$
25. $V_w = 2943.231 \text{ m}^3$
26. $t = 14.337 \text{ min}$
27. $h = 1204.485 \text{ m}$
28. $\overline{PQ} = 804.734 \text{ m}$
29. $\overline{S_1 S_2} = 276.406 \text{ m}$
30. 33.898 km
31. $x = 1.083$
32. $x = 5.758 \text{ cm}$
33. $x = \frac{b}{2}(1 - \tan^2 \alpha)$

Lösungen zu Übungen 19

34. $A = \frac{1}{2}pq \cdot \sin \alpha$

35. a) $A = \frac{1}{2}pq = 20 \text{ cm}^2$

b) / c) für $\alpha \neq 90^\circ$: 2 Dreiecke mit gleicher Fläche

36. a) $A = 8445.797 \text{ m}^2$

b) $A = 1070.067 \text{ dm}^2$

37. $\gamma_1 = 32.151^\circ$; $\gamma_2 = 147.849^\circ$ (→ es gibt immer 2 Lösungen)

38. $c = 1.705 \text{ dm}$; $b = 3.254 \text{ dm}$

39. a) $A = 13.252 \text{ cm}^2$

b) $A = 36.180 \text{ cm}^2$

c) $A = 37.971 \text{ cm}^2$

d) $A = 14.506 \text{ cm}^2$

e) $A = r^2 \left(\frac{\pi \cdot \arcsin\left(\frac{s}{2r}\right)}{180} - \frac{\sin\left(2 \cdot \arcsin\left(\frac{s}{2r}\right)\right)}{2} \right)$

f) $A = \frac{s^2}{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180} - \sin \alpha \right)$

40. $A = 36.522 \text{ cm}^2$

41. $A = 69.828 \text{ cm}^2$

42. $A = 68.518 \text{ m}^2$

43. $A = 12.616 \text{ cm}^2$

44. $A = 349.613 \text{ mm}^2$

45. $A = 146.153 \text{ cm}^2$

46. $A = 14.799 \text{ mm}^2$

47. $A = 1219.663 \text{ mm}^2$

48. $s = 32.492 \text{ cm}$; $r_u = 52.573 \text{ cm}$; $A_{10} = 8122.992 \text{ cm}^2$

49. a) $A_n = \frac{a^2 \cdot n}{4 \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)}$

b) $A_n = r_2 \cdot n \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)$

c) $A_n = \frac{\rho^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)}{2}$

8 Trigonometrische Funktionen und ihre Graphen

Lösungen zu Übungen 20

1.

	Definitionsmenge	Wertemenge	Periodenlänge	Symmetrieachsen	Symmetriezentren
$\sin x$	\mathbb{R}	$-1 \leq y \leq 1$	2π	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$S_k = (k \cdot \pi, 0)$
$\cos x$	\mathbb{R}	$-1 \leq y \leq 1$	2π	$x_k = k \cdot \pi$	$S_k = \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, 0\right)$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right\}$	\mathbb{R}	π	keine	$S_k = \left(k \cdot \frac{\pi}{2}, 0\right)$

$k \in \mathbb{Z}$

2.

	Nullstellen	Relative Minima	Relative Maxima
$\sin x$	$x_k = k \cdot \pi$	$x_k = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$
$\cos x$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$x_k = \pi + k \cdot 2\pi$	$x_k = k \cdot 2\pi$
$\tan x$	$x_k = k \cdot \pi$	keine	keine

$k \in \mathbb{Z}$

3. a) $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ b) $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\tan 225^\circ = \tan 45^\circ = 1$
 d) $\sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$
4. a) $x = \frac{\pi}{4}$ b) $x = \frac{4\pi}{3}$ c) $x = \frac{2\pi}{3}$
5. a) $-\cos x$ b) $\sin x$ c) $-\sin x$ d) $-\cos x$
6. a) $2 \cdot \cos x$ b) 0 c) -1
 d) -1 e) 0 f) $2 \cdot \cos x$

Lösungen zu Übungen 21

7. a) Graph b) Jeder y-Wert wird verdreifacht.
 c) Jeder y-Wert wird halbiert. d) Spiegelung an der x-Achse
8. a) Graph, Periode 2π b) Graph, Periode $\frac{2\pi}{3}$
 c) Graph, Periode 4π d) Graph, $y = \cos(-x) = \cos x$
9. a) Graph b) Verschiebung um $\frac{\pi}{3}$ nach rechts (positiv)
 c) Verschiebung um $\frac{3\pi}{4}$ nach links (negativ)
10. a) Graph
 b) Verschiebung um +1 in y-Achsenrichtung nach oben
 c) Verschiebung um -2 in y-Achsenrichtung nach unten
11. a) - h) Graph
12. a) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 2$ b) $y = \frac{1}{2} \cdot \sin(4x) - 2.5$
 c) $y = 3 \cdot \sin(x + \frac{\pi}{3}) - 1$ d) $y = \sin(\frac{1}{2}(x + \frac{\pi}{2})) + 2$
13. a) $y = -3 \cdot \cos(x - \frac{\pi}{2})$ b) $y = 2 \cdot \cos(x - \frac{5\pi}{6}) + 2$
 c) $y = \frac{3}{2} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}$ d) $y = \cos(\frac{1}{2}(x - \frac{3\pi}{2})) - 2$
14. a) $y = \tan(x - \frac{\pi}{2}) + 3$ b) $y = \frac{1}{2} \cdot \tan(\frac{x}{2}) - 5$
15. $y = 2 \sin(\frac{1}{3}(x + \frac{\pi}{2})) + 1 \rightarrow$ strecken mit Faktor 2 in y-Richtung; strecken mit Faktor 3 in x-Richtung;
 schieben um $\frac{\pi}{2}$ nach links; schieben um 1 Einheit nach oben; $H(\pi/3), T(4\pi / -1)$
16. $y = \cos(\frac{5}{2}(x - \frac{\pi}{10})) - \frac{1}{2} \rightarrow$ strecken mit Faktor $\frac{2}{5}$ in x-Richtung;
 schieben um $\frac{\pi}{10}$ nach rechts; schieben um $\frac{1}{2}$ nach unten; $H(0.314 / 0.5), T(1.574 / -1.5)$

Lösungen zu Übungen 22

17. a) $p = 2, a = 1, Q(0; -1), x_0 = \frac{1}{2}$ b) Graph
 18. a) $p = 6, a = 3, Q(0; 0), x_0 = -3$ b) Graph
 19. a) $p = 8, a = \frac{1}{2}, Q(0; 0), x_0 = 12$ b) Graph
 20. a) $N\left(n \cdot \pi - \frac{c}{b}/0\right)$; Abstand: $\frac{\pi}{b}$
 b) Amplitude: wird verdoppelt; Lage neu: $N\left(n \cdot \pi - \frac{c}{2b}/0\right)$; Abstand: wird halbiert
 c) Amplitude: wird halbiert; Lage neu: $N\left(n \cdot \pi - \frac{c}{2b}/0\right)$; Abstand: bleibt gleich
 d) Amplitude: bleibt gleich; Lage: bleibt gleich; Abstand: wird verdoppelt
 e) $|a| > 1 \rightarrow$ Streckung vertikal; $0 < |a| < 1 \rightarrow$ Stauchung vertikal
 $b > 1 \rightarrow$ Stauchung horizontal; $0 < b < 1 \rightarrow$ Streckung horizontal
 21. a) $A = 200.0 \text{ V}; T = \frac{1}{25} \text{ s}; t_0 = 0.004 \text{ s}; f = 25 \text{ Hz}; \varphi = -0.683$
 b) $U = -126.225 \text{ V}$ c) $U = 126.225 \text{ V}$
 d) $x_1 = 0.00697 \text{ s}$ e) $x_0 = 0.0143 \text{ s}$
 22. $I = 30 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t)$
 23. $P(t) = 30 \cdot \sin\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$

9 Polarkoordinaten

Lösungen zu Übungen 23

1. Graph
 2. $A = (4; 60^\circ), B = (6; 150^\circ), C = (3; 0), D = (2; 225^\circ)$
 3. a) $P = (10; 53.13^\circ)$ b) $P = (7.280; 15.95^\circ)$
 c) $P = (5; 233.1^\circ)$ d) $P = (5.385; 338.2^\circ)$
 4. a) $P = (9.329; 5.829)$ b) $P = (-5; 5)$
 c) $P = (0; -7)$ d) $P = (1.248; -2.728)$
 5. $B = G; D = F; E = K = H$
 6. a) $d = 7.087$ b) $d = 9.242$

Lösungen zu Übungen 24

7. a) $r(\varphi) = \frac{4}{3\cos\varphi - \sin\varphi}$ b) $r(\varphi) = \frac{3}{2\cos\varphi + \sin\varphi}$
 8. a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = 3x - 5$
 9. a) $r(\varphi) = \frac{6}{4\sin\varphi + \cos\varphi}$ b) $r(\varphi) = \frac{6}{2\sin\varphi - 3\cos\varphi}$
 10. $g_1: r(\varphi) = -\frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}; g_1(x) = -x - 1$
 $g_2: r(\varphi) = \frac{4}{2\sin\varphi - \cos\varphi}; g_2(x) = \frac{1}{2}x + 2$
 $g_3: r(\varphi) = \frac{4}{\sin\varphi + 2\cos\varphi}; g_3(x) = -2x + 4$

11. a) Graph
 b) Kreis
 c) Die Grösse ändert sich; $k = r_{\text{Kreis}}$
 d) Graph für $k = a$ ist deckungsgleich mit dem Graphen für $k = -a$.
12. a) Graph
 b) Gerade
 c) $\varphi = \frac{\pi}{6}$
 d) Steigung der Geraden
13. a) Graph
 b) Spiegelung an der y-Achse
 c) Grösse der Kurve ändert sich; $P = (2a; 0^\circ)$; $Q = (a; 90^\circ)$
14. gleiche Form, aber die Kurve ist um 90° gedreht
5. a) Kardioide
 b) Graph; die Kurve ist jetzt «ingerollt».
 c) Graph; die Kurve hat nur eine Delle und keinen Einschnitt.
 d) Graph; die Kurve hat keine Delle und ist nicht vollständig kreisförmig.
16. a) Graph
 b) für ungerade n : n Blütenblätter; für gerade n : $2n$ Blütenblätter
 c) $n = 3$
 d) Graph; die Länge der Blütenblätter ändert sich, a ist die Länge der Blütenblätter
 e) Spiegelung an der y-Achse gegenüber betragsgleichem n (für gerade n : deckungsgleich)

Lösungen zu Übungen 25

17. a) Graph; Windungsabstand entspricht $a \cdot 2\pi$
 b) Windungsabstand immer gleich (bei der logarithmischen Spirale wird er immer grösser)
18. a) Graph; Windungsabstand wird mit grösser werdendem a schneller grösser
 b) Windungsabstand ist nicht immer gleich
 c) Abstand der Windungen vergrössert sich noch schneller
19. a) $r(0) = 1$
 b) Graph; je grösser b ist, umso enger ist der Windungsabstand
 c) $r(\varphi) = e^{\frac{\varphi}{b} \cdot \ln 2} = e^{\frac{\ln 2}{b} \cdot \varphi}$
20. a) Graph; Umkehrfunktion der logarithmischen Spirale, deshalb ändert sich der Windungsabstand auch, aber von breit zu immer schmaler (also umgekehrt wie bei der logarithmischen Spirale).
 b) Je kleiner der Betrag von a ist, umso enger ist die Spirale gewunden. Negative a verursachen eine Punktspiegelung der Spirale am Ursprung des Koordinatensystems.
 c) Für φ zwischen 0 und 1 windet sich in der Gegenrichtung eine logarithmische Spirale ins Zentrum.
21. a) Graph
 b) Asymptotisches Verhalten (Asymptote bei $y = a$), Zentrum wird nie erreicht, Windungsabstand ändert sich noch schneller als bei anderen Spiraltypen

22. a) Nein, ist nicht mit einer Gleichung beschreibbar, jeder Viertelkreis müsste separat beschrieben werden.
 b) Entspricht am ehesten einer logarithmischen Spirale. Passt im Zentrum eher schlecht, an den Übergängen zwischen den Quadraten am besten.
 c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (Fibonacci-Zahlenreihe)
 d) Annäherung an ϕ ; umso näher, je höher das Verhältnis in der Fibonacci-Reihe steht
23. Streckfaktor zwischen den beiden äussersten Nullstellen:
 $\approx 1.8 \rightarrow k = \frac{\ln 1.8}{\pi} \rightarrow r(\varphi) = e^{\frac{\ln 1.8}{\pi} \cdot \varphi}$

10 Goniometrie

Lösungen zu Übungen 26

1. a) $\cos \alpha$
 c) 1
 e) $2 \cdot \sin^2 \alpha$
2. a) $\cos \alpha = 0.842$; $\tan \alpha = 0.642$
 b) $\sin \alpha$
 d) $\frac{1}{\sin \alpha}$
 f) 1
 b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5} = 0.917$;
 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2} = 2.291$
 c) $\sin \alpha = 0.933$; $\cos \alpha = 0.359$

Lösungen zu Übungen 27

3. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{AD}{SD}$
4. a) $\cos(240^\circ + 90^\circ) = -\sin(240^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$
 b) $\sin(150^\circ - 60^\circ) = \sin(90^\circ) = 1$
5. a) $\frac{84}{85}, -\frac{36}{85}, \frac{13}{85}, \frac{77}{85}, \frac{84}{13}, -\frac{36}{77}$
 b) $\frac{204}{325}, \frac{36}{325}, -\frac{253}{325}, \frac{323}{325}, -\frac{204}{253}, \frac{36}{323}$
6. a) $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta$
 b) $-2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$
 c) $1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta$
 d) $\tan \alpha + \tan \beta$

Lösungen zu Übungen 28

7. a) $\frac{1}{\tan^2 \alpha} - 1$
 b) $1 - \tan^2 \alpha$
 c) -1
 d) 2
8. a) $\cos \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
 b) $\frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$
 c) $4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 8 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha$
 d) $1 - 8 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$
9. a) z.B. $\alpha = 30^\circ: 1 \neq \frac{3}{2}$
 b) z.B. $\alpha = 30^\circ: 0 \neq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
10. a) -0.936
 b) 0.572
 c) -0.882
 d) -1.624
11. a) $\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$
 b) $\cos^2 \alpha \cdot \cos \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta$

12. a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

c) $\sqrt{3} + 2$

e) $-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

13. a) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha$

c) $\frac{\tan \alpha - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \cdot \tan \alpha}$

14. a) 0

15. a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$

c) $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

b) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$

d) $\frac{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}}{4} \cdot \cos \alpha - \frac{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}}{4} \cdot \sin \alpha$

b) -1

b) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$

Lösungen zu Übungen 29

16. a) $L = \{45^\circ; 225^\circ\}$

c) $L = \{68.2^\circ; 248.2^\circ\}$

e) $L = \{167^\circ; 347^\circ\}$

17. a) $L = \{45^\circ; 225^\circ\}$

c) $L = \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ; 270^\circ; 360^\circ\}$

18. a) $L = \{32.405^\circ; 147.595^\circ\}$

c) $L = \{18.789^\circ; 327.211^\circ\}$

19. a) $L = \{57.995^\circ; 237.995^\circ\}$

c) $L = \{54.404^\circ; 125.596^\circ\}$

20. a) $L = \{126.870^\circ; 233.130^\circ\}$

c) $L = \{0^\circ; 45^\circ; 180^\circ; 225^\circ; 360^\circ\}$

21. a) $L = \{35.264^\circ; 144.736^\circ; 215.264^\circ; 324.736^\circ\}$

b) $L = \{53.234^\circ; 126.766^\circ; 233.234^\circ; 306.677^\circ\}$

c) $L = \{54^\circ; 126^\circ; 198^\circ; 342^\circ\}$

22. a) $L = \{0^\circ; 60^\circ; 180^\circ; 300^\circ; 360^\circ\}$

c) $L = \{0^\circ; 75.964^\circ; 180^\circ; 255.964^\circ; 360^\circ\}$

23. a) $L = \{0^\circ; 60^\circ; 120^\circ; 180^\circ; 240^\circ; 300^\circ; 360^\circ\}$

24. a) $L_x = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}; S_y = \{0; -1\}$

c) $L_x = \{ \}; S_y = \{0; 2.866\}$

25. a) $L_{x/y} = \{0/0; \pi/0; 2\pi/0\}$

b) $L = \{74^\circ; 254^\circ\}$

d) $L = \{50^\circ; 170^\circ\}$

f) nicht definiert

b) $L = \{135^\circ; 315^\circ\}$

d) $L = \{0^\circ; 180^\circ; 360^\circ\}$

b) $L = \{69.174^\circ; 249.174^\circ\}$

d) $L = \{85.5^\circ; 94.5^\circ; 274.5^\circ; 265.5^\circ\}$

b) $L = \{0^\circ; 66.422^\circ; 180^\circ; 293.578^\circ; 360^\circ\}$

d) $L = \{26.565^\circ; 206.565^\circ\}$

b) $L = \{53.130^\circ; 126.870^\circ; 233.130^\circ; 306.870^\circ\}$

d) $L = \{30^\circ; 150^\circ\}$

d) $L = \{90^\circ\}$

b) $L = \{111.471^\circ; 248.529^\circ\}$

d) $L = \{106.307^\circ; 253.693^\circ\}$

b) $L = \{90^\circ; 270^\circ\}$

b) $L_x = \left\{ \frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}; \frac{23\pi}{12} \right\}; S_y = \{0; -0.5\}$

d) $L_x = \{2.191; 5.333\}; S_y = \{0; -3.5\}$

b) $L_{x/y} = \{0.896/1.250; 2.246/-1.250\}$

Stereometrie

11 Grundlagen

Lösungen zu Übungen 30

- a) Skizze
 b) z.B. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AG} \cap \overline{BH}$; $\overline{AB} = \overline{BA}$; $ABC \parallel EFG$; $ABC = BCD$; $ABD \cap CGF$
- a) schneiden sich b) sind windschief c) 48.190° d) 50.768°
- a) 45° b) 20.705° c) 34.54°

12 Prisma und Zylinder

Lösungen zu Übungen 31

- a) $V = 900$; $S = 770$ b) $V = 10b^3$; $S = 42b^2$ c) $V = 11c^3$; $S = 38c^2$
 d) $V = 1026$; $S = 914$
- 13 cm
- a) nein b) 5682 cm^2 c) 2.807 kg
- $a^2\sqrt{2}$
- a) $V = \frac{k^3\sqrt{3}}{9}$ b) $S = 2k^2$ c) $l = 4\sqrt{3} \cdot k$
- a) n^3 b) $\frac{1}{n^3}$ c) $\cdot n$ d) $27; \frac{1}{27}; \cdot 3$
- $a = 0.424 \text{ m}$; $b = 0.707 \text{ m}$; $c = 1.131 \text{ m}$
- $l = 6.257 \text{ cm}$; $b = 8.849 \text{ cm}$; $h = 10.837 \text{ cm}$
- a) Skizze b) $A = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$
- 40 %
- 25.883 %
- 329.102 %
- 61.059 kg
- $d = 0.780 \text{ dm}$
- 1.08 cm
- a) 9 m b) 8.062 m

Lösungen zu Übungen 32

- $V = 418.997 \text{ cm}^3$; $S = 454.146 \text{ cm}^2$
- $V = 2014.36 \text{ cm}^3$; $S = 1087.82 \text{ cm}^2$
- $5\sqrt{21} = 22.913$
- $s = 7a$; $h = 12a$
- $V = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot s^3$; $S = s^2 \cdot (3\sqrt{3} + 9)$
- $s = a \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3}}$
- a) Prisma b) $V = \frac{a^3}{4}$ c) $S = a^2 \cdot \left(2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

18. a) 113.097 cm^3 b) 0.638 g/cm^3
 19. $3.848 d^3$
 20. 11.906 dm^2
 21. a) $1:1.698$ b) $1:1.910$

Lösungen zu Übungen 39

22. a) 4785.830 b) 2726.490
 c) $\frac{13d^3\pi}{750} = 0.0545d^3$ d) $\frac{14\rho^3\pi}{81} = 0.543\rho^3$
 23. $G = 28.492 \text{ cm}^2$; $M = 33.016 \text{ cm}^3$
 24. a) 2675.578 cm^2 b) $S = \pi\left(d(h_1 + h_2) + \frac{d^2}{2} - h_1^2 - h_2^2\right)$
 25. 3009.557 cm^2
 26. 110.238 g
 27. 851.530 dm^2
 28. 0.5 m
 29. Tropen: 39.875 %; gemässigte Zonen: 51.831 %; Polarzonen: 8.294 %
 30. 254.939 g
 31. a) $\frac{a+r}{2a}$ b) $\frac{2}{3}$
 32. a) $V = \frac{\sqrt{(d^2 - b^2)^3} \cdot \pi}{6}$ b) 3.636 cm^3

Vektorgeometrie

16 Vektorbegriff und Vektoroperationen

Lösungen zu Übungen 40

- a) $\vec{AB} = \vec{DE}; \vec{BC} = \vec{EF}; \vec{CA} = \vec{FD}; \vec{AD} = \vec{BE} = \vec{CF}$
 b) $\vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CA} = \vec{DE} = \vec{EF} = \vec{FD}; \vec{AD} = \vec{BE} = \vec{CF}$
- $\vec{AB} = \vec{ED}; \vec{BC} = \vec{FE}; \vec{CD} = \vec{AF}$
- a) $c = 15.297; \varphi = 78.690^\circ$
 c) $c = 2.702; \varphi = 21.870^\circ$
- b) $c = 11.250; \varphi = 23,122^\circ$
 14.500

Lösungen zu Übungen 41

- Skizze
- a) $\vec{a} = 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$
 b) $\vec{a} = \frac{16}{3}(\vec{b} - 2\vec{c})$
 c) $\vec{a} = -\frac{1}{8}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c}$
- a) wahr
 b) falsch
 c) wahr
 d) wahr
 e) falsch
- $\vec{r}_a = 2\vec{a} - 2\vec{b}; \vec{r}_b = -\frac{5}{4}\vec{a} + 3\vec{b}; \vec{r}_c = -\frac{3}{4}\vec{a} - 2\vec{b};$ Skizze
- $\vec{CE} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}; \vec{AS} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}; \vec{CM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}; \vec{HS} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}; \vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}; \vec{MS} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$
- a) $\vec{BF} = \frac{3}{10}\vec{b} - \frac{9}{10}\vec{c}$
 b) $\vec{AF} = \frac{2}{5}\vec{AE}$
 c) $\vec{BF} = \frac{9}{10}\vec{BD}$
- $\vec{AE} = \vec{c} + \vec{h}; \vec{AF} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{h}; \vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{h}; \vec{MA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c} - \vec{h}$
- $\vec{HQ} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}; \vec{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}; \vec{PF} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$
- a) abhängig
 b) unabhängig
 c) unabhängig
 d) abhängig
 e) unabhängig
 f) abhängig (mehr als 3 Vektoren)
- a) unabhängig
 b) abhängig
 c) unabhängig
 d) abhängig
 e) unabhängig
 f) $\vec{EF} = -\vec{CD} \rightarrow$ abhängig
- $\vec{AM} = \vec{MC}$ und $\vec{BM} = \vec{MD}$
- $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}; \vec{M} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
- $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$
- $\vec{BS} = 2 \cdot \vec{SM}_b$
- $\vec{b} = (5; 53.13^\circ); \vec{c} = (\sqrt{37}; 260.5^\circ); \vec{d} = (2\sqrt{2}; 135^\circ)$

17 Komponentendarstellung von Vektoren

Lösungen zu Übungen 42

- $A = (2; 2); B = (-1; 1); C = (-2; -3)$

2. Skizze

3. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. Skizze

5. $A' = (1; 9); B' = (0; 0); C' = (-3.5; -16)$

6. $\vec{d} = \begin{pmatrix} -\frac{33}{10} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$

7. $A' = (-3; -1); B' = (2; 0); C' = (-2.5; 6)$

8. a) $\vec{b}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

9. a) $a = \sqrt{26} = 5.099$

b) $b = \frac{5\sqrt{17}}{2} = 10.31$

10. $\overline{OA} = 5; \overline{OB} = 10; \overline{OC} = \sqrt{29} = 5.385$

Lösungen zu Übungen 43

11. $A = (3; 2; 0); B = (0; 2; -1); C = (2; 0; 1)$

12. Skizze

13. a) $x = 5; y = -\frac{2}{3}; z = -\frac{3}{2}$

b) $x = -3; y = 2; z = 2$

14. Skizze

15. a) $E = (4; 2; 0); F = (4; 0; 1); G = (0; 2; 1); H = (4; 2; 1)$

b) $(2; 0; 0), (4; 1; 0), (2; 2; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 0.5), (4; 0; 0.5), (4; 2; 0.5), (0; 2; 0.5), (2; 0; 1), (4; 1; 1), (2; 2; 1), (0; 1; 1)$

c) $(2; 1; 0), (2; 0; 0.5), (4; 1; 0.5), (2; 2; 0.5), (0; 1; 0.5), (2; 1; 1)$

d) $(2; 1; 0.5)$

16. $B' = (1; -4; 6)$

17. $\vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1.9 \\ \frac{11}{15} \end{pmatrix}$

18. a) $A' = (3; -4; -2)$

b) $A' = (-3; 4; 2)$

c) $A' = (-3; -4; 2)$

d) $A' = (-3; -4; 2)$

19. a) $a = 17$

b) $b = 9$

20. $\overline{OA} = 9; \overline{OB} = 9; \overline{OC} = \sqrt{26} = 5.099$

21. $z = \pm 36$

22. a) $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}' = \begin{pmatrix} 6.527 \\ -2.720 \\ 7.071 \end{pmatrix}; \vec{c}' = \begin{pmatrix} -5.774 \\ 5.774 \\ -5.774 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}' = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}' = \begin{pmatrix} -6.527 \\ 2.720 \\ -7.071 \end{pmatrix}; \vec{c}' = \begin{pmatrix} 5.774 \\ -5.774 \\ 5.774 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}' = \begin{pmatrix} 0.653 \\ -0.272 \\ 0.707 \end{pmatrix}; \vec{c}' = \begin{pmatrix} -0.577 \\ 0.577 \\ -0.577 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}' = \begin{pmatrix} -0.653 \\ 0.272 \\ -0.707 \end{pmatrix}; \vec{c}' = \begin{pmatrix} 0.577 \\ -0.577 \\ 0.577 \end{pmatrix}$

Lösungen zu Übungen 44

23. a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

24. $y_1 = 6; y_2 = -12$

25. a) 32

b) 33.455

26. a) 35.852

b) 31.125

27. a) $\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 13 \\ -12 \end{pmatrix}$

f) $d_2 = -18$

28. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $d_1 = -6; d_3 = -1$

29. a) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

30. a) $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0.5 \\ -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$

31. $y = 15.5$

32. $b_2 = 3; b_3 = -2; c_1 = -2; c_2 = -6; c_3 = 4 \rightarrow b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

33. $S_1(18; 18); S_2(2; -12); S_3(-14; 0)$

34. $\vec{AB} = \vec{DC}; \vec{BC} = \vec{AD}$

35. $C = (0; 1; 9); D = (-2; -6; 5)$

36. $\vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CA} = \vec{AD} = \vec{BD} = \vec{CD}$

37. a) $P_1 = (2; 0); P_2 = (0; 14)$

b) $P_1 = (-2.214; 0; 0); P_2 = (0; -5.167; 0); P_3 = (0; 0; 15.5)$

38. $P_1 = (-11; 0); P_2 = (-4.333; 0)$

39. $P_1 = (0; 3.870; 0); P_2 = (0; 6.880; 0)$

40. a) ja (linear unabhängig)

b) nein (kollinear)

41. a) ja (linear unabhängig)

b) nein (\vec{a}/\vec{b} kollinear)

c) ja (linear unabhängig)

d) nein (linear abhängig)

42. a) $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b}$

43. a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 12.5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = 12.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

44. a) $\vec{e}_a = \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}$

c) $\vec{e}_c = \begin{pmatrix} 0.816 \\ -0.408 \\ -0.408 \end{pmatrix}$

b) $\vec{d} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \\ 4 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{e}_b = \begin{pmatrix} -0.514 \\ 0.857 \end{pmatrix}$

d) $\vec{e}_d = \begin{pmatrix} 0.845 \\ -0.169 \\ 0.507 \end{pmatrix}$

18 Das Skalarprodukt

Lösungen zu Übungen 45

1. a) 5
c) -1
e) 2
2. a) 120°
c) 139.764°
e) 75.821°
3. a) 180°
c) 19.188°
e) nicht lösbar in $G = R$
4. a) $\alpha = 44.215^\circ$; $\beta = 52.125^\circ$; $\gamma = 83.660^\circ$
b) $\alpha = 100.091^\circ$; $\beta = 38.754^\circ$; $\gamma = 41.155^\circ$
5. $\alpha = 84.094^\circ$; $\beta = 90^\circ$; $\gamma = 130.601^\circ$; $\delta = 55.305^\circ$
6. 72.508° bzw. 107.492°
7. a) $n = -1$
b) $n_1 = 1$; $n_2 = -1$
c) $n_1 = 2$; $n_2 = -2$
8. $\angle AMB = 97.407^\circ$; $\angle FMG = 44.129^\circ$
9. a) 60°
b) 90°
c) 60°

Lösungen zu Übungen 46

10. a) -6
c) 18
11. a) skalar; 1
c) vektoriell; $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$
e) undefiniert
12. a) $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = a^2 - b^2$
c) $4n\vec{a} + n\vec{b}$
13. $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \neq (a_1 a_1 + a_2 a_2)(b_1 b_1 + b_2 b_2)$
- b) 8
d) -60
b) skalar; 0
d) skalar; 24
f) skalar; 8
b) $6\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2$
d) $9\vec{a}^2 - 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2$

Lösungen zu Übungen 47

14. a) $\vec{w}_\alpha \cdot \vec{w}_\beta = 0$

b) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$

c) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}; \vec{c} \cdot \vec{b} = c \cdot b \cdot \cos \alpha$

15. a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

b) $\vec{a} = \vec{h} - \vec{p}; \vec{b} = \vec{q} + \vec{h}$

c) zusätzlich $\vec{c} = \vec{p} + \vec{q}$

16. $\vec{AB} = \vec{DC}; \vec{BC} = \vec{AD}; \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$

17. a) $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 3.3 \\ -4.94 \\ 0.82 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3.3 \\ 4.94 \\ -0.82 \end{pmatrix}$

19. a) -5

b) 2

20. $x = -6; z = 2$

21. $(y_1 = -1.5; z_1 = 1.5); U_1 = 14; A_1 = 12.25; (y_2 = 0.75; z_2 = 0.75); U_2 = 13; A_2 = 10.563$

22. $P_1 = (0; 0; 4); P_2 = (0; 0; -2)$

23. a) -0.5

b) 2

24. $a^2 + c^2 = b^2$

Lösungen zu Übungen 48

25. a) $\varphi_x = 59.036^\circ; \varphi_y = 30.964^\circ$

b) $\varphi_x = 70.093^\circ; \varphi_y = 159.547^\circ; \varphi_z = 85.117^\circ$

c) $\varphi_x = 71.565^\circ; \varphi_y = 90^\circ; \varphi_z = 18.435^\circ$

d) $\varphi_x = 69.590^\circ; \varphi_y = 35.538^\circ; \varphi_z = 62.290^\circ$

26. $P_1 = (9.246; 0; 0); P_2 = (-7.246; 0; 0)$

27. $\varphi_z = 65.427^\circ$

28. $a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}; a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

29. $C_1 = (1; -7); C_2 = (5; 1)$

Lösungen zu Übungen 49

30. a) $a_b = \sqrt{5} = 2.236; \vec{a}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $a_b = -\sqrt{38} = -6.164; \vec{a}_b = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

31. a) $5; \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $-3.790; \begin{pmatrix} -2.874 \\ -2.011 \\ 1.437 \end{pmatrix}$

32. a) $2\sqrt{5} = 4.472$

b) 6.403

33. $H_c(2; 0); F = 45$

34. $C_1(-1; 7; -10); C_2(-9; -1; -6); F_1 = F_2 = 10.062$

35. 14.731

$$36. \quad \overrightarrow{AD}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$37. \quad 81.876$$

Lösungen zu Übungen 50

$$38. \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.30 \\ 1.70 \\ 1.40 \end{pmatrix} = 9.10 \text{ Fr.}$$

$$39. \text{ a) } 1350 \text{ Zeiteinheiten}$$

$$\text{b) } K = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \left[0.05 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.25 \\ 0.20 \end{pmatrix}$$

$$40. \quad 168.60 \text{ Fr.}$$

$$41. \quad 68.885^\circ$$

$$42. \text{ a) } 96 \text{ J}$$

$$\text{b) } 14.036^\circ$$

$$43. \quad 611.068 \text{ N}$$

19 Vektorielle Darstellung von Geraden

Hinweis: Zu jeder Geraden gibt es unendlich viele Parametergleichungen. In den Lösungen ist eine dieser Möglichkeiten aufgeführt.

Lösungen zu Übungen 51

$$1. \text{ a) } g: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } g: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } g: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ a) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad g_{xy}: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; g_{yz}: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; g_{xz}: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ a) } h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$5. \text{ a) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad g_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad g_3: \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$g_4: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad g_5: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad g_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad g_3: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad g_4: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad \text{a) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$9. \quad \text{a) } y = -2x + 5$$

$$\text{b) } y = 4x - 7$$

$$10. \quad \text{a) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$11. \quad \text{a) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$12. \quad y = -\frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$$

Lösungen zu Übungen 52

$$13. \quad \text{a) Punkte auf } g: \text{z. B. } (2; -1); (6; 0); \text{ Punkte neben } g: \text{z. B. } (2; 0); (2; -2)$$

$$\text{b) Punkte auf } g: \text{z. B. } (3; -4; 1); (5; -2; 1);$$

$$\text{Punkte neben } g: \text{z. B. } (3; -4; 0); (3; -3; 1)$$

$$14. \quad \text{a) Punkte auf } g: \text{A, C; Punkte neben } g: \text{B}$$

$$\text{b) Punkte auf } g: \text{B, C; Punkte neben } g: \text{A}$$

$$15. \quad \text{a) } P = (7; 0; 3)$$

$$\text{b) } Q = (1; 3; 0)$$

$$16. \quad \text{a) Ja}$$

$$\text{b) Nein}$$

$$17. \quad \text{a) Ja}$$

$$\text{b) Ja}$$

$$18. \quad \text{a) } d = \frac{11}{5} = 2.2$$

$$\text{b) } d = 3$$

$$\text{c) } d = \frac{11\sqrt{5}}{5} = 4.919$$

$$\text{d) } d = 5$$

$$\text{e) } d = \frac{\sqrt{105}}{5} = 2.049$$

$$\text{f) } d = \frac{6\sqrt{65}}{13} = 3.721$$

$$19. \quad d_x = \sqrt{5} = 2.236; \quad d_y = 2\sqrt{5} = 4.472; \quad d_z = \sqrt{17} = 4.123$$

$$20. \quad d = \frac{\sqrt{4830}}{21} = 3.309$$

$$21. \quad \text{a) } Q = \left(\frac{63}{29}, \frac{89}{29}\right)$$

$$\text{b) } Q = \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$22. \quad P' = (-4; 4; 0)$$

Lösungen zu Übungen 53

23. $S = (1; 2; 2)$

24. a) $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

25. g, h : schneiden sich; g, i : identisch; g, k : schneiden sich; h, i : schneiden sich;
 h, k : parallel; i, k : schneiden sich

26. g_1, g_2 : schneiden sich; g_1, g_3 : parallel; g_1, g_4 : windschief; g_1, g_5 : windschief;
 g_2, g_3 : schneiden sich; g_2, g_4 : windschief; g_2, g_5 : windschief;
 g_3, g_4 : schneiden sich; g_3, g_5 : windschief; g_4, g_5 : schneiden sich

27. a) windschief

b) parallel

c) identisch

d) schneiden sich

28. schneiden sich

29. a) nein (windschief)

b) ja (parallel)

30. a) parallel zur y-Achse

b) parallel zur x-z-Ebene

c) schneidet die x-Achse

d) geht durch den Ursprung

Lösungen zu Übungen 54

31. a) $S = (3; 5); \varphi = 81.87^\circ$

b) $S = \left(\frac{125}{31}; -\frac{132}{31}\right) = (4.032; -4.258); \varphi = 30.32^\circ$

c) $S = (-3; -1; 1); \varphi = 71.24^\circ$

d) $S = (-13; 8; 13); \varphi = 51.63^\circ$

32. a) $S = \left(\frac{123}{73}; \frac{181}{73}\right) = (1.685; 2.479); \varphi = 89.22^\circ$

b) $S = \left(\frac{26}{7}; \frac{10}{7}; \frac{12}{7}\right) = (3.714; 1.429; 1.714); \varphi = 58.60^\circ$

33. a) $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

34. a) $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $i: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $k: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 23 \\ -10 \end{pmatrix}$

35. a) $d = \sqrt{26} = 5.099$

b) $d = \frac{7\sqrt{6}}{3} = 5.715$

36. $F = \frac{\sqrt{115}}{4} = 2.681$

37. a) schneiden sich; $S = (2; 7; -3); \varphi = 66.40^\circ$

b) windschief; $d = \sqrt{33} = 5.745$

c) parallel; $d = 8.297$

d) identisch; ($\varphi = 0^\circ; d = 0$)

Lösungen zu Übungen 55

38. a) $A: \vec{r} = \begin{pmatrix} 250 \\ -750 \\ 250 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}; B: \vec{r} = \begin{pmatrix} -600 \\ -1200 \\ 800 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ -10 \end{pmatrix}$
- b) $A_{60} = (-2150; 450; 1450); B_{60} = (0; 600; 200)$
- c) $t = 0$: A: 250 m. ü. Boden, B: 800 m. ü. B.; $t = 40$: A: 1050 m. ü. B., B: 400 m. ü. B.
- d) A: 1283.6 m; B: 655.7 m
- e) A: 176.4 km/h; B: 119.4 km/h
39. A: z-Koordinate des Richtungsvektors positiv, also Steigflug;
B: z-Koordinate des Richtungsvektors negativ, also Sinkflug;
z-Koordinate gleich 0: konstante Höhe
40. 24.09°; 77.5 s
41. 17.55°; 80 s
42. $S = (-350; -450; 550)$; kollidieren nicht, da $t_A \neq t_B$
43. 295.8 m
44. $K: \vec{r} = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; 6 Min. 30 s
45. a) $U_1: P_0 = (30; 20; 0), P_{20} = (70; 40; -120)$;
 $U_2: P_0 = (150; 140; -80), P_{20} = (130; 100; 160)$
- b) (170; 180; 0)
- c) U_1 : 23.05 km/h; U_2 : 16.50 km/h
- d) U_1 : 21.6 km/h; U_2 : 14.4 km/h
- e) U_1 : 2 Min. 10 s; U_2 : 4 Min.
46. a) U_1, K : nein; U_2, K : ja
- b) U_1, K : nein; U_2, K : ja, da $t_K = t_{U_2}$
- c) z. B. anderen Startzeitpunkt für Kugel wählen
- d) $U_1, K: d_{\min} = 28.70$ m; $U_2, K: d_{\min} = 0$ m
47. a) ja, $S = (110; 60; -240)$
- b) ja, $t_{U_1} = t_{U_2}$
- c) Tauchbahnen sind neu windschief

20 Vektorielle Darstellung der Ebene

Hinweis: Zu jeder Ebene gibt es unendlich viele Parametergleichungen. In den Lösungen ist eine dieser Möglichkeiten aufgeführt.

Lösungen zu Übungen 56

- $P = (23; 11; 16)$
- $y = 37$
- Punkte auf E : A, C; Punkte neben E : B

$$4. \text{ a) } E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ mit } \vec{u} = k \cdot \vec{v} \text{ folgt: es gibt unendlich viele Lösungen } (C \in AB)$$

5. a) nein

b) ja

$$6. \text{ a) } E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad E: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$9. \text{ a) rot: } E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ gelb: } E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{grün: } E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) rot: } E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ gelb: } E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{grün: } E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$10. \quad F: \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$11. \text{ a) } E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } E: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) wenn $Q \in g$ bzw. $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, z.B. $Q = (10; 3; -1)$

$$12. \quad F: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu Übungen 57

13. a) ja

b) nein (g schneidet E)14. a) ja (schneiden sich), $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) nein (windschief)

c) ja (parallel), $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 15. $\left(\frac{11}{4}; 0; 0\right), \left(0; \frac{22}{13}; 0\right), (0; 0; -22)$

16. a) parallel

b) $g \in E_{yz}$ 17. a) $g \in E$

b) parallel

c) schneiden sich, $D = (10; 1; 8)$ 18. $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ 19. a) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungen zu Übungen 58

20. a) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ -13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ 21. a) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 22. rot-gelb: $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$; rot-grün: $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ 16 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$;gelb-grün: $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

23. a) parallel

b) schneiden sich